

Redes neuronales artificiales, una aplicación al mercado inmobiliario habitacional de segmento medio de la ciudad de Morelia Michoacán, México

Artificial neuronal networks, an application to the habitational real estate segment market in the city of Morelia Michoacan, Mexico
José Carlos Preciado Carrillo¹

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo principal demostrar las bondades que tienen las redes neuronales artificiales al estimar el precio de los inmuebles, conociendo la importancia de los diferentes órganos e instituciones financieras, el tener valores de mercado más apegados a las condiciones de mercado, mayor será la seguridad en la toma de decisiones en los diferentes escenarios; tratándose de instituciones financieras, su interés radica en conocer este valor para el financiamiento de préstamo con garantía hipotecaria, en los diferentes órganos de gobierno para cobrar los impuestos catastrales se sirven de este valor como base para la realización de diferentes trámites ante entidades públicas o particulares, las redes neuronales artificiales, y en concreto la red multicapa, pueden ser una alternativa para la estimación del precio.

Abstract

The main goal of this paper is to show the benefits of Artificial Neural Networks (ANN) in the estimation of property value. Being conscious about the importance of the different financial systems and institutions, the closer the real state values were to market conditions, the safest decisions could be taken in all different scenarios. The interest when talking about financial institutions resides in knowing this value so they can offer financing with mortgage guaranty. Artificial Neural Networks, in particular multilayer networks, can be a useful alternative for costs estimation to those government institutions which are served by this value to collect property tax value as a basis to carry out the realization of different procedures with public or private entities.

¹ Especialista en Valuación de Bienes Inmuebles, Maquinaria y Equipo, por las Universidades Autónoma del Estado de México y la Universidad Autónoma de Zacatecas. Especialista en Metodología Multicriterio por la Universidad Politécnica de Valencia España. Diplomado en estudio avanzados en Urbanismo, Construcción y Valoraciones, por la Universidad Politécnica de Valencia España. Maestro en Valuación por la Universidad Autónoma de Zacatecas. Doctor en Urbanismo, Construcción y Valoraciones, con premio Cum Laude, por la Universidad Politécnica de Valencia España. Valuación & Consultoría Inteligente. carlospreciadoc@yahoo.com.mx

Palabras claves: Clasificación de materia, Economía Urbana, redes neuronales artificiales.

Key words: Matter classification, urban economy, artificial neural networks.

Clasificación JEL: R794 Y C45.

1. Introducción

La valuación en todo tipo de activos es imprescindible. En cualquier sociedad moderna es necesario conocer el precio de los activos implicados para un gran número de trámites o actos económicos. Empezando por expropiaciones del gobierno, pago de impuestos catastrales, compra-venta, seguros, crédito hipotecario, re-expresión de estados financieros, escisión, juicios y tomas de decisiones de empresas, entre otras.

El estudio acerca de la manera más objetiva de estimar los precios de mercado de los inmuebles ha suscitado un gran interés desde hace algunas décadas. Algunos autores como Caballer *et al.* (2007)², hasta la aparición de los tratados específicos sobre la materia, la formulación conceptual y metodológica se reducía a unos elementos muy rudimentarios, susceptibles de ser reducidos al concepto de proporcionalidad o vinculados a la renta de la tierra, mediante ciertas normas empíricas, más o menos precisas, recogidas en tratados normativos de índole jurídica o religiosa.

La valuación juega un papel importante, pues sin ella sería muy complejo realizar los diferentes trámites, el pago de puesto catastral o el dejar en garantía ante una institución financiera, por mencionar algunos de entre otros tantos usos que tiene el hecho de conocer el precio de un inmueble.

López (2013) en su estudio sobre “Sistemas de información geográfica y econometría espacial en la tasación de inmuebles urbanos”, comenta los cambios que en los últimos años ha habido en el sector inmobiliario, debido en primer lugar a los altos precios de los bienes inmuebles. Los profesionales en valoración no sólo deben conocer los procedimientos matemáticos.³

Por otro lado Aznar *et al.* (2008), menciona que cuanto mayor es el incremento económico, mayor es la necesidad de una mejor y más ajustada valoración de los activos de esa sociedad.

El objetivo del presente trabajo es verificar los resultados de una red neuronal del tipo multicapa *back propagation* para la estimación y predicción de precios de inmuebles sobre los diferentes segmentos de mercado inmobiliario. La afirmación es que las redes neuronales artificiales pueden ser capaces de encontrar relaciones más complejas entre las variables y, por tanto, buena capacidad explicativa de los precios de los inmuebles.

2 Afirman que desde los primeros indicios de la existencia de la actividad de la tasación o valoración vinculada a la asignación de un valor económico a un activo, bien o servicio -que se puede situar en el funcionamiento de los nilómetros del Antiguo Egipto, 3500 años A.C.

3 También deben tener conocimientos sólidos en teorías económicas, financieras, derecho y estadística.

2. Evolución histórica de la valuación

Aznar *et al.* (2008), comenta los evidentes desarrollos en países como Italia desde finales de la edad media con autores tan importantes como Elia del Re, Serperi y Medici. En España se tiene a autores como Ruiz Rochera en el siglo IX, o Torrejón y Boneta ya en el siglo XX. Estos autores afirman que la investigación sobre el tema de valoración comienza en el último tercio de siglo pasado, fundamentalmente por los profesores Ballesteros y Roca Cladera.

A lo largo del siglo XX la ciencia de la valoración ha adquirido un notable desarrollo en el seno de distintas escuelas. Destacan la escuela italiana, la española, la anglosajona y la hispanoamericana.

En México, citado por Aznar *et al.* (2008), se dice que existen indicios de valoración en la época prehispánica. Así podemos afirmar que después de la fundación de México-Tenochtitlán en 1325, los aztecas inician la conquista del territorio y la imposición de tributos, y la ciudad cuenta con un aparato administrativo fiscal integrado, entre otros, por el equivalente a un ministro de hacienda (*chihuacohualt*), y un tesorero general (*bueycalpique*), este último entendido como un grupo numeroso de recaudadores.

Investigaciones sobre redes neuronales artificiales y regresión hedónica es la de Núñez *et al.* (2009), Utilizando 1189 observaciones al mercado inmobiliario de la ciudad de Córdoba España, contrasta los modelos de regresión hedónica y las redes neuronales artificiales, obteniendo mejores resultados con el modelo de redes.

Fernández *et al.* (2012) utiliza un modelo con tres capas: una de entrada, otra intermedia y una capa de salida con red de retropropagación, con 1.442 muestras entre viviendas nuevas y de segunda mano, clasificando tres categorías -alta, media y baja-.

Por otro lado Gallego (2004) emplea un modelo de redes multicapa con salida hacia adelante con tres capas, una de entrada, intermedia y una capa de salida, con 12 variables que explican el precio de venta de las viviendas. En una primera prueba utilizan 100 muestras, de las cuales 85 son para el entrenamiento y 15 para la validación. También comparó este modelo con un modelo de regresión múltiple con las mismas 85 muestras. El resultado por regresión múltiple resultó de 15%, con una diferencia de 7%, pues de acuerdo con estos estudios encuentra evidencias donde las redes neuronales artificiales obtienen buenos modelos de aproximación en la valoración inmobiliaria.

Pi-ying (2011) desarrolla un modelo de propagación hacia atrás de la red neuronal artificial. Contrasta el modelo RNA contra un modelo de regresión hedónica, y en sus conclusiones afirma que el modelo de redes neuronales artificiales presenta errores menores con respecto de la regresión hedónica entre 10 y 15 por ciento.

Otra aplicación es el caso de Amabile *et al.* (1998), en su investigación con uso de redes neuronales en el análisis espacial de valores de propiedad,

utiliza dos modelos de redes denominados perceptrón multicapa (MLP) y de función de base radial (RBF), con una muestra de 100 transacciones hechas en la ciudad de Treviso (Italia), tomando para ello el 80% de la muestra para el aprendizaje y el 20% para la validación. Obtuvo un resultado de 2,3% en valores por debajo del umbral de evaluación de 10%, con una media cuadrática de menos de 5% para la red de base radial con una alta capacidad explicativa del valor en ambos modelos.

Por otra parte Limsombunchai (2004) utiliza 200 observaciones, aplicando ambos modelos, y encontrando evidencias con resultados más favorables a las redes neuronales.

Amri *et al.* (2003) emplean un modelo de red neuronal con múltiples capas y otro modelo neuroborroso, y con base en la lógica borrosa con variables estructurales y geospaciales; los resultados obtenidos en ambos modelos son muy parecidos, con conclusiones afines y positivas.

Rossini (1998), con el apoyo de estudiantes de la Universidad del Sur de Australia, ha estimado modelos de red neuronal artificial usando un método de propagación hacia atrás y una función sigmoide, con dos estructuras en cada caso. La primera estructura con tres capas: capa de entrada, capa oculta y la capa de salida. La capa de entrada tiene una neurona para cada variable independiente. La capa de salida sólo tiene una neurona de salida y es el modelo de estimaciones. Otro modelo utilizado es el análisis de regresión múltiple, donde encuentra evidencias de que a mayor cantidad de observaciones utilizadas en el modelo de regresión se presentan mejores resultados; en cambio al utilizar menos cantidad de observaciones las redes neuronales muestran mejores resultados, para lo que han utilizado 1.940 muestras en la ciudad de Adelaida (Australia).

En literaturas recientes se pueden encontrar abundantes investigaciones donde se plantea la comparación de modelos de regresión y redes neuronales artificiales, entre ellas podemos mencionar a (Preciado, 2015) valoración de inmuebles urbanos, comparativa modelo regresión multivariable *versus* redes neuronales artificiales para la ciudad de Morelia, Michoacán, México, utilizando una muestra de 870 observaciones con resultados favorables a las redes neuronales artificiales.

3. Métodos de Valuación

En la actualidad se aplican con carácter general tres métodos básicos de valoración para la obtención del precio de un inmueble.

El primero de ellos es el denominado método de costo, consistente en obtener el valor del terreno, más el de su construcción con sus respectivas depreciaciones por edad, uso, conservación, etc., en caso de no ser vivienda nueva, y sus instalaciones u obras complementarias (bardas perimetrales, jardines, etc.).

El segundo método es el de actualización de flujos de caja (actualización

de rentas), en el que el valor se obtiene descontando los flujos de caja que resultan por el alquiler del inmueble. Está basado en el principio económico de actualización, y considera valores en relación con el valor presente de beneficios futuros derivado del ingreso por renta (alquiler) de la propiedad, utilizando una tasa de actualización, apoyada por algún instrumento financiero, menos gastos inherentes o de mantenimiento del activo.

Por último destacamos el método comparativo o de mercado, consistente en estimar el precio aplicando factores por corrección de bienes iguales o similares al bien objeto en estudio que han sido vendidos o que se encuentran compitiendo en el mercado.

La mayor parte de las investigaciones empíricas desarrolladas sobre temas de valuación se basan en el método comparativo o de mercado, utilizando como muestras principalmente precios de oferta, pues tratándose de un mercado que no es transparente y tan heterogéneo se recurre a este tipo de información.

Como parte fundamental de nuestro análisis, se hará la modelización de la valoración de inmuebles de naturaleza urbana.

4. Las redes neuronales artificiales

Las redes neuronales artificiales (RNA) se pueden definir como un dispositivo diseñado a imitación de los sistemas nerviosos de los animales, consistentes en una interconexión de unidades, denominadas neuronas artificiales o elementos de proceso, cuyo funcionamiento se inspira en el de las neuronas biológicas (Pérez, 2003, p. 13).

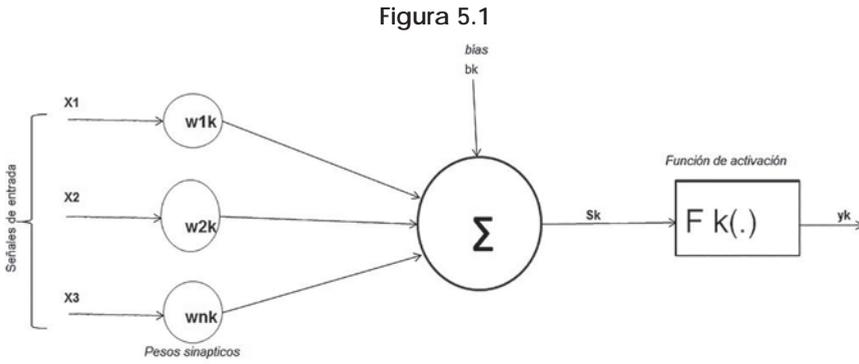
5. Modelo de valuación por redes neuronales artificiales

Un conjunto de conexiones o sinapsis caracterizadas cada una de ellas por un peso sináptico, de forma que la señal de entrada X_j , presente en la neurona k , se verá multiplicada por pesos sinápticos W_{jk} . Este peso puede variar en un rango que incluye tanto valores negativos (entrada inhibidora) como valores positivos (entrada excitadora). Corchado *et al.* (2000, p. 6).

La regla de propagación que determina la entrada efectiva o el nivel de excitación de la neurona k , denotada por s_k , a partir de todas las entradas individuales a la misma, donde se considera como entrada efectiva a la suma todas las señales de entrada X_j a la neurona k , ponderadas por su respectivos pesos sinápticos w_{jk} . Corchado *et al.* (2000, p. 6).

“ F_k , función de activación que determina la salida y_k de la neurona a partir de su nivel de excitación” Corchado *et al.* (2000, p. 6).

El modelo incluye la entrada externa adicional, denominada polarización o “bías” y denotada por b_k , su función es aumentar o disminuir el poder de excitación de la neurona dependiente, si es un valor positivo o negativo. Véase la figura 5.1.



Fuente: Tomada de Corchado *et al.* (2000, p. 6), y adaptación propia.

El modelo matemático se describe de la siguiente manera.

$$S_k = \sum_{j=1}^n (W_{jk})(X_j) + b_k \tag{5.1}$$

Donde W_j representa el peso sináptico de la neurona, X las señales de entrada, b la polarización o bía: disminuir o aumentar el umbral de excitación de la neurona.

Si se considera la polarización b_k como peso sináptico de una entrada adicional en el cual su valor siempre será 1, se reescribe la ecuación a una forma homogénea.

Regla de propagación que combine la salida de cada neurona con su correspondiente ponderación por el patrón de conexión.

$$S_k = \sum_{j=1}^n (W_{jk})(X_j) \tag{5.2}$$

Siendo en este caso $W_k = [b_k, w_{1k}, \dots, w_{jk}, \dots, w_{nk}]^T$ el vector columna de pesos y $x = [1, x_1, \dots, x_n]^T$ el vector columna de entrada, esto a su vez lo podemos escribir de forma vectorial tal que: $y_k = F_k[w_k^T \cdot x]$. Corchado *et al.* (2000, p. 7).

Dependiendo del tipo de salida, las neuronas pueden tomar valores de 0 o 1 si son discretas. Otro rango de valores que va desde $[0, +1]$ o $[-1, +1]$, si son continuas.

5.1. Principales funciones de activación

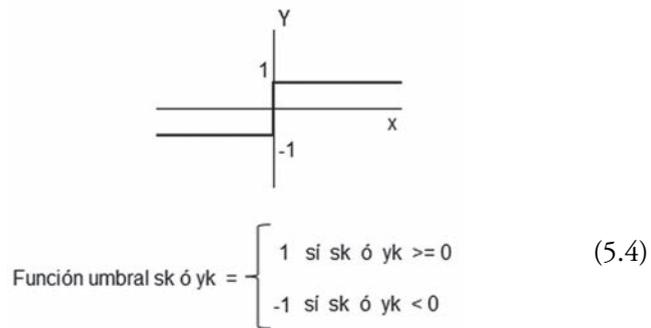
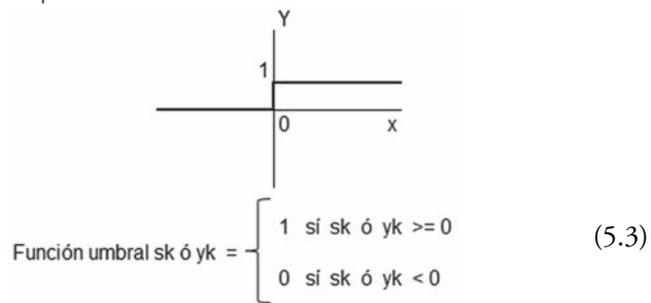
Existen cuatro funciones principales de transferencia típicas que determinan diferentes tipos de neuronas: La función escalón, la función lineal y mixta, la sigmoideal y la función gaussiana.

5.1.1. Función de activación escalón

Función escalón o umbral se utiliza cuando la salida de red es de tipo binario, dos posibles valores (0, 1).

La neurona se activará cuando el valor neto de entrada sea igual o mayor al umbral y no se activará en caso contrario. Véanse las ecuaciones 5.3 y 5.4, así como la figura 5.2.

Figura 5.2.
 Representación de la función escalón.



Fuente: Propia, readaptada de Hilera y Martínez (1995).

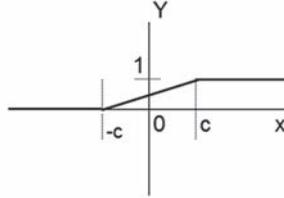
La figura 5.2. Representa dos funciones escalón en ambos casos se toma en cuenta el umbral cero, en caso de que no lo fuera, el escalón quedaría desplazado.

5.2.2. Función de activación lineal y mixta

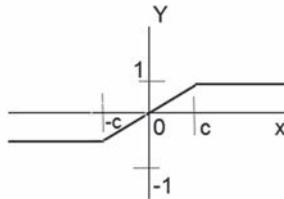
Esta expresión responde a la expresión $sk \text{ ó } yk(x) = x$, las neuronas con función mixta, si la suma de señales de entrada es menor que un límite inferior, la activación se define como 0 (0-1). Si dicha suma es mayor o igual que el límite superior, entonces la activación es 1. Si la suma de entrada está comprendida entre ambos límites, superior e inferior, entonces la activación se define como una función lineal de la suma de las señales de entrada. Véanse las ecuaciones 5.5 y 5.6, así como la figura 5.3.

Figura 5.3.

Representación de la función de activación lineal y mixta.



$$sk \text{ ó } y_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{sí } x < -c \\ 1 & \text{sí } x > c \\ x/(2c) + 1/2 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.5)$$



$$sk \text{ ó } y_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{sí } x < -c \\ 1 & \text{sí } x > c \\ a \cdot x & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.6)$$

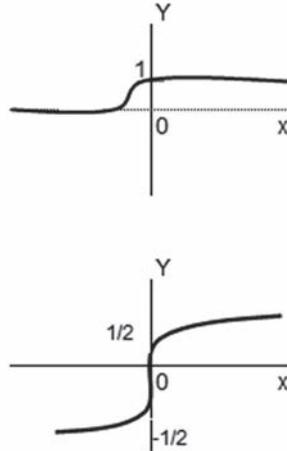
Fuente: Propia, readaptada de Hilera y Martínez (1995).

La figura 5.3 representa dos funciones: una lineal y otra mixta, en ambos casos se toma en cuenta el umbral de acuerdo con las ecuaciones [5.5 y 5.6].

5.2.3. Función de activación continua sigmoideal

Es cualquier función definida en el intervalo de posibles valores de entrada con un incremento monótonico y que tenga ambos límites superiores e inferiores (sigmoideal o arco tangente). El valor obtenido de salida debe de estar comprendido en la zona alta o baja del sigmoide, su derivada es siempre positiva y cercana a cero para valores grandes positivos o negativos. Véanse la ecuación 5.7. y figura 5.4.

Figura 5.4
Representación de la función de activación sigmoideal



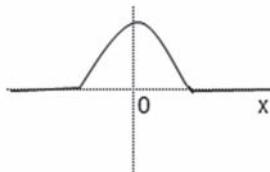
$$sk \text{ ó } yk(x) = 1 / (1 + e^{\wedge} -x) \quad (5.7)$$

Fuente: Propia, readaptada de Hilera y Martínez (1995).

5.2.4. Función de activación gaussiana

Los centros y anchura de estas funciones pueden ser adaptados. Mapeos que suelen requerir dos niveles ocultos (neuronas en la red que se encuentran entre las de entrada y las de salida), utilizando neuronas con dos funciones de transferencia sigmoideas; algunas veces se pueden realizar con un solo nivel en redes con neuronas de función gaussiana. Hilera y Martínez (1995). Véanse la ecuación 5.8 y la figura 5.5.

Figura 5.5.
Representación de la función de activación gaussiana.



$$sk \text{ ó } yk(x) = A \cdot e^{\wedge} -Bx^2 \quad (5.8)$$

Fuente: Propia, readaptada de Hilera y Martínez (1995).

Normalmente estas funciones, antes detalladas, suelen considerarse determinísticas y son monótonas crecientes y continuas como se ha observado en las neuronas biológicas. Existe otro tipo de funciones, pero las más usadas son las que se han descrito anteriormente.

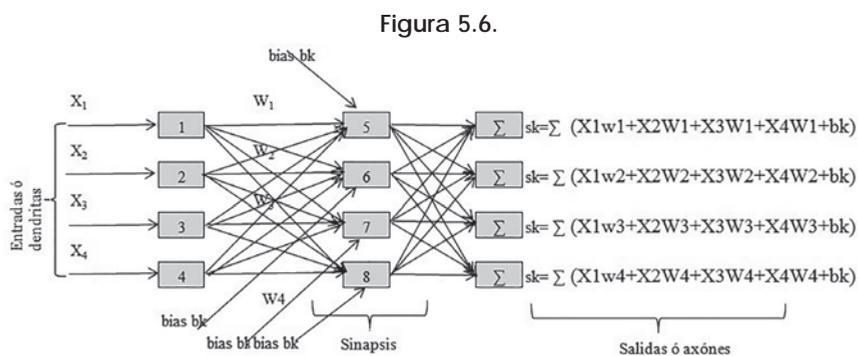
Una RNA consta de varios elementos de proceso conectados de alguna forma, generalmente organizados en grupos denominados **capas**. Existen dos capas típicas en toda red, que contienen conexiones con el exterior:

- La **capa de entrada o patrón**, que son los datos que se presentan a la red.
- La **capa de salida**, que muestra la respuesta de la red a una entrada.

5.3. Perceptrón multicapa y su topología

El perceptrón multicapa crea modelos a partir de multiplicadores, sumadores y funciones. El entrenamiento consiste en la presentación de pares de vectores en las capas de entrada y salida (vectores de entrada y salida deseada). La red crea un modelo al ajustar sus pesos en función de los vectores de entrenamiento, de forma que a medida que pasan estos patrones hacia cada vector de entrada, la red producirá un valor de salida más similar al vector de salida esperado. Estas redes también se llaman de retropropagación (*back propagation*), este nombre se les ha asignado por el tipo de aprendizaje que utilizan. Corchado *et al.* (2000, p. 87 y 88).

Las redes de este tipo tienen una capa de entrada, una capa intermedia y otra de salida. La figura 5.6. Muestra el diagrama y su topología. La información se propaga de capa en capa (de derecha a izquierda), por medio de las neuronas de cada capa.



Fuente: Propia, muestra la topología típica.

En la figura 5.6., se muestra una red de un perceptrón multicapa, se trata de un modelo unidireccional compuesto por tres capas, en la primera capa recibe cuatro entradas, también denominadas biológicamente como dendritas, aquí solamente se encarga de recibir información no realiza ningún otro

proceso, en la segunda capa oculta denominada también sinapsis se realiza la ponderación de pesos y la tercer capa, conocida también como axones, es la que conduce la salida de la multiplicación de la ponderación de los pesos por las entradas, incluidas las bias, la polarización o el umbral para cada entrada, dando un resultado denominado s_k . Su ecuación matemática se ha denotado anteriormente como [5.2.].

$$s_k = \sum_{i=k}^n (W_{jk})(X_j) + bk \quad (5.9)$$

Donde W representa el peso sináptico de la neurona,

X , las señales de entrada y b la polarización o la bia contribuyendo a disminuir o aumentar el umbral de excitación de la neurona.

Si se considera la polarización b_k como peso sináptico de una entrada adicional en el cual su valor siempre será 1, se reescribe la ecuación a una forma homogénea.

Todo modelo neuronal debe de disponer de una regla de propagación que combine la salida de cada neurona con su correspondiente ponderación por el patrón de conexión.

$$s_k = \sum_{i=k}^n (W_{jk})(X_j) \quad (5.10)$$

Siendo en este caso $W_k = [b_k, w_{1k}, \dots, w_{jk}, \dots, w_{nk}]^T$ el vector columna de pesos y $x = [1, x_1, \dots, x_N]^T$ el vector columna de entrada, esto a su vez se puede escribir de forma vectorial tal que: $y_k = F_k[w_k^T x]$. Corchado *et al.* (2000, p. 7).

Regla delta para actualizar los pesos en forma proporcional a la delta, o diferencia entre la salida deseada y la obtenida realmente, mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta w_{jk}(t+1) = \alpha \delta_{pj} s_{k_{pj}} \quad (5.11)$$

Dónde:

$\Delta W_{jk}(t+1)$: es la variación entre la neurona j y la k , una vez que reciben impulso que las active.

α : factor de aprendizaje que tendrá un valor en el intervalo entre 0 y 1, determina la velocidad de aprendizaje de la neurona (valor constante).

$s_{k_{pj}}$: valor de la salida de la neurona k , bajo el aprendizaje j .

δ_{pj} : valor delta o diferencia entre la salida deseada y la obtenida realmente (valor concreto).

Ecuación de la regla delta generalizada, la delta se define como:

$$\delta_{pj} = (d_{pj} - s_{k_{pj}})X_j \quad (5.12)$$

Dónde:

p : representa un patrón de entrenamiento.

d_{pj} : es el valor de salida deseado de la neurona k para el patrón j .

sk_{pj} : es el valor de salida de la neurona k para el patrón j .

X_j : función de entrada neta de información que recibe la neurona j .

En la regla delta, cuándo una neurona no sea de salida de la red, es decir, sea una capa intermedia, el error que se genere será función del error cometido por las neuronas que reciben como entrada la salida de dicha neurona. Esto es lo que se denomina anteriormente la propagación del error hacia atrás. En este caso la delta generalizada se expresará como sigue:

$$\delta_{pj} = \left(\sum_k \delta_{pk} - W_{jk} \right) X_j \quad (5.13)$$

Donde:

k : cubre todas aquellas neuronas a las que está conectada la salida.

W_{jk} : representa todos los pesos de conexión de todas las neuronas

X_j : representa las neuronas de entrada a la red o patrones de entrada.

δ_{pj} : valor concreto, diferencia entre valor de salida deseada y la obtenida realmente.

Se ha explicado en la ecuación [5.13], el factor α , que es el parametro de aprendizaje, determina la velocidad de aprendizaje de la neurona. A mayor tasa de aprendizaje mayores son los cambios de los pesos a cada iteración y por tanto más rápido será el aprendizaje. Sin embargo, para cambios grandes los resultados podrian empeorar. Rumelhart *et al.* (1986), citado por Hilera y Martínez (1995), proponen se agregue en el incremento de los pesos un término (momento), β quedando como sigue:

$$\begin{aligned} W_{pj}(t+1) &= W_{kj}(t) + \alpha \delta_{pj} sk_{pj} + \beta (W_{jk}(t) - W_{jk}(t+1)) = \\ \Delta W_{jk}(t+1) &= \alpha \delta_{pj} sk_{pj} + \Delta W_{jk}(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Donde β es una constante (momento), que determina el efecto en $(t+1)$ del cambio de los pesos en el instante t .

La regla delta en el caso del perceptrón requiere que las neuronas tengan una activación continua y diferenciable, por lo que generalmente se utiliza una función de tipo sigmoidea, aunque también puede ser una de tipo lineal.

Enseguida se detallan en forma resumida los pasos y las fórmulas para aplicar el algoritmo de entrenamiento.

Paso 1 Iniciar los pesos en la red con valores pequeños aleatorios.

Paso 2 Presentar un patrón de entrada X : X_1, X_2, \dots, X_j y especificar la salida deseada que debe de generar la red d_1, d_2, \dots, d_j (si la red se utiliza como un clasificador, todas las salidas deseadas tendrán el valor de cero, salvo una que será de la clase a la que pertenece el patrón de entrada).

Paso 3 Calcular la salida actual de la red, primero se presentan las entradas a la red y se van calculando las salidas que presenta cada capa, hasta llegar a la capa de salida, ésta será la salida de la red sk_1, sk_2, \dots, sk_j . Las etapas son las siguientes.

Se calculan las entradas netas para las neuronas ocultas que provienen de las neuronas de entrada.

Para una neurona j oculta:

$$sk_{pj}^h = \sum_{j=1}^n W_{jk} X_j + bk^h \quad (5.15)$$

En donde el índice h se refiere a las magnitudes de la capa oculta, el subíndice j , al j -ésimo vector de entrenamiento, k , a la k -ésima neurona oculta. El término bk puede ser opcional, actúa como una entrada más en la red.

Se calculan las salidas de las neuronas ocultas:

$$sk_{pj} = sk_{pj}^h \quad (5.16)$$

Se realizan los mismos cálculos para obtener las neuronas de salida de la capa oculta.

$$sk_{jk}^0 = \sum_{j=1}^n W_{jk} X_j^0 + bk^0 \quad (5.17)$$

$$sk_{jk} = sk_{jk}^0 \quad (5.18)$$

Paso 4 Calcular los términos de error de todas las neuronas.

Si la neurona k es una neurona de la capa de salida, el valor de la delta es:

$$\delta_{jk} = (d_{jk} - sk_{jk})X_{jk} \quad (5.19)$$

Paso 5 Actualización de los pesos.

Para ello se utiliza el algoritmo recursivo, comenzando por las neuronas de salida y trabajando hacia atrás hasta llegar a la capa de entrada, ajustando los pesos de la forma siguiente.

$$W_{jk}(t+1) = W_{jk}(t) + \Delta W_{jk}(t+1) \quad (5.20)$$

$$\Delta W_{jk}(t+1) = \alpha \delta_{kj} sk_{kj}$$

Y para los pesos de las neuronas de la capa oculta:

$$W_{jp}(t+1) = W_{kj}(t) + \Delta W_{kj}(t+1)$$

$$\Delta W_{kj}(t+1) = \alpha \delta_{jp} sk_{jp} \quad (5.21)$$

En ambos casos, para acelerar el proceso de aprendizaje, se puede adicionar un término de momento de valor:

$$\beta_{kj}^0(t) - W_{kj}^0(t-1) \quad (5.22)$$

Para una neurona de salida y de valor:

$$\beta_{kj}^h(t) - W_{kj}^h(t-1) \quad (5.23)$$

Para una neurona oculta.

Paso 6 El proceso se repite hasta que el término de error.

$$Ep = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_{jk}^2 \quad (5.24)$$

Resulta aceptablemente pequeño para cada uno de los patrones aprendidos.

Para medir el grado de explicación del modelo, se realizaran algunas pruebas estadísticas, una de estas pruebas es el coeficiente de correlación lineal de Pearson, se mide en qué grado o qué tan relacionada está la variable dependiente y la independiente.

Mediante la siguiente ecuación se obtiene dicho coeficiente de correlación lineal.

$$r = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{[n(\sum X^2) - (\sum X)^2][n(\sum Y^2) - (\sum Y)^2]} \quad (5.25)$$

Dónde:

n es el número de pares de observaciones.

$\sum X$ es la suma de las variables X .

$\sum Y$ es la suma de las variables Y .

$(\sum X^2)$ es la suma de los cuadrados de la variable X .

$(\sum X)^2$ es la suma de las variables X , elevada al cuadrado.

$(\sum Y^2)$ es la suma de los cuadrados de la variable Y .

$(\sum Y)^2$ es la suma de las variables Y , elevada al cuadrado.

$\sum XY$ es la suma de los productos de X e Y .

Otra de las pruebas que se deben de realizar es el cálculo del coeficiente de determinación, con el cual se trata de medir en qué proporción las variables o la variable independiente X , explica el valor de la variable dependiente Y .

Mediante la siguiente ecuación se obtendrá el coeficiente de determinación que mide la proporción de la variación de Y , variable explicada y X variable explicativa independiente.

$$r^2 = \frac{SCR}{SCT} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2 / \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2 \quad (5.26)$$

SCR: Suma cuadrática de los residuos
SCT: Suma cuadrática total
 \hat{Y}_i : Precio estimado de las observaciones
 \bar{Y}_i : Precio medio de observados
 Y_i : Precios observados
 r^2 : Coeficiente de determinación

r^2 ajustada

Si se quieren comparar diferentes modelos, para verificar cual explica mejor el precio no se debe realizar a través del estadístico r^2 , sino a través de una variante del mismo; el estadístico r^2 corregido o ajustado, que toma en cuenta tanto el número de observaciones como el número de variables explicativas del modelo. Pues un modelo será mejor que otro si el r^2 ajustado es mayor, con independencia del r^2 . Por lo tanto a partir de ahora se debe de observar el r^2 ajustado, que a diferencia del r^2 sí tiene en cuenta el diferente número de variables y observaciones entre dos modelos de regresión.

Su expresión matemática es la siguiente.

$$r^2_{ajustada} = 1 - \frac{\text{Suma de cuadrados del error (SCE)}}{\text{Suma de cuadrados residuos del modelo (SCR)}} \quad (5.27)$$

Dónde:

$r^2 = r$ cuadrada ajustada.

SCE = Suma de los cuadrados del error = $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$, diferencia entre valor observado y valor estimado.

Y = Valor observado.

\hat{Y} = Valor estimado por el modelo.

SCR = Suma de los cuadrados del modelo = $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$, suma de los cuadrados de las diferencias entre cada valor estimado y el valor promedio de las observaciones.

Otra forma de medir la bondad entre dos o varios modelos, es determinar cual explica mejor el precio de los inmuebles, lo cual es posible saber mediante el error absoluto medio entre el precio observado y el precio explicado. Su ecuación es la siguiente.

$$EAM = \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{Y}_i - Y_i|}{n} \quad (5.28)$$

Dónde:

EAM = Error absoluto medio

$\sum_{i=1}^n$ Sumatoria desde i hasta n .

\hat{Y}_i = Precio estimado.

Y_i = Precio observado.

n = Número de observaciones.

Otra de las bondades que se medirán entre el precio observado y el precio estimado, para comparar entre un modelo y otro, es la raíz del error cuadrático medio, utilizando la siguiente ecuación.

$$RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{n}} \quad (5.29)$$

Dónde:

RECM= Raíz del error cuadrático medio

$\sum_{i=1}^n$ Sumatoria desde i hasta n.

\hat{Y}_i = Precio estimado.

Y_i = Precio observado.

$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2$ Sumatoria de la diferencia entre el precio estimado y el precio observado elevado al cuadrado.

n= Número de observaciones.

6. Caso de Aplicación

La muestra utilizada, se ha obtenido en la ciudad de Morelia Michoacán, viviendas de segmento de mediana calidad de los barrios de la ciudad, del año 2017; 70% de la misma con precios de oferta y el 30% con precios de venta consumada.

La muestra se constituyó de variables cuantitativas y cualitativas (nominales), Guijarro, citado por (Preciado 2015.)⁴, las que mayor explicación aportan al precio de los inmuebles. Entre ellas se encuentran las siguientes.

Superficie de terreno. Se trata de la variable independiente, misma que se cuantifica en metros cuadrados.

Superficie construida o vendible. Variable independiente que se cuantifica en metros cuadrados, se trata de la distribución de todos los espacios de la vivienda.

Número de baños. Variable independiente en la que se cuantifica el número de baños completos y medios baños.

Número de dormitorios. Variable independiente que cuantifica el número de dormitorios del inmueble.

Antigüedad. Variable independiente que cuantifica la edad en años que tiene el inmueble.

Número de niveles. Variable independiente que cuantifica el número de niveles con el que fue construido el inmueble (1, 2, 3, etcétera).

Infraestructura. Variable independiente cualitativa, porque incluye los servicios como agua potable, drenaje, alcantarillado, energía eléctrica, banquetas, guarniciones y tipo de pavimentos en las calles; algunos corresponden a variables numéricas y otras a variables ordinales.

⁴ Variables nominales o categóricas.- "Se definen a partir de diferentes categorías que no guardan relación (orden) entre sí. Ejemplo: Código postal, Orientación de la vivienda, Guijarro, citado por (Preciado 2015).

Para las variables nominales se usará la siguiente clasificación.

- 3 Muy bueno, 2 bueno, 1 suficiente y 0 deficiente.
 En la cual están consideradas las siguientes variables⁵.

Equipamiento urbano o entorno urbano

Esta variable en realidad es una metavariante que está compuesta por muchos atributos⁶, algunos de ellos cuantitativos y otros cualitativos, que influyen directamente y otros que lo hacen inversamente proporcional al precio.

7. Resultados

Tabla 7.1.

F. de activación capa oculta	F. de activación capa de salida	Número unidades en la capa oculta	Traning(entrenamiento)	Prueba	Reserva	T. de entrenamiento	Coef. de correlación	Coef. de determinación	R ² ajustado	Error estándar de estimación	Error cuadrático medio
Tangente hiperbólica	Identidad	15	157	62	35	30 minutos	86%	93%	92%	1832	1825
Tangente hiperbólica	Sigmoidea	15	155	74	24	30 minutos	83%	91%	91%	341248	339902
Sigmoidea	Identidad	15	323	185	64	15 minutos	85%	92%	92%	10137	10097
Sigmoidea	Tangente hiperbólica	15	155	68	31	60 minutos	85%	92%	92%	292136	290983

La tabla [7.1.] muestra los resultados estadísticos para los diferentes modelos, en la columnas uno y dos los diferentes modelos y el tipo de función, en la columna tres se observa en número de unidades en la capa oculta, en la columna cuatro el número de observaciones para el entrenamiento, en la columna cinco, el número de observaciones de prueba, capa seis número de observaciones de reserva, columna siete el tiempo de entrenamiento, en la columna ocho el coeficiente de correlación, columna nueve el coeficiente de determinación, en la columna diez el r² ajustado, columna once el error estándar de estimación y en la columna doce el error cuadrático medio.

Tabla 7.2.

F. de activación capa oculta	F. de activación capa de salida	Número unidades en la capa oculta	Traning(entrenamiento)	Prueba	Reserva	T. de entrenamiento	Precio Observado	Precio Estimado por el modelo	EAM=Error absoluto medio= (Precio estimado-precio observado)/ no. De muestras
Tangente hiperbólica	Identidad	15	157	62	35	30 minutos	1,545,000	1,574,087	114.97
Tangente hiperbólica	Sigmoidea	15	155	74	24	30 minutos	1,545,000	1,674,129	510.39
Sigmoidea	Identidad	15	152	79	23	15 minutos	1,545,000	1,554,322	36.85
Sigmoidea	Tangente hiperbólica	15	155	68	31	60 minutos	1,545,000	1,601,357	222.75

5 Abastecimiento de agua, drenaje sanitario, electrificación, alumbrado público, transporte público, vigilancia, recolección de basura, banquetas, y guarzones.
 6 Escuelas primarias, secundarias, preparatorias, universidades etc., su medición será cuantificable en metros lineales como son; consultorios o centros médicos, transporte urbano y tiempo en espera del mismo, mercado o supermercados, plaza o jardines, centros deportivos, centros comunitarios, contaminación general, servicios (hospitales, restaurantes, bancos, escuelas, etcétera).

La tabla [7.2.] se ha realizado la estimación del precio de una vivienda fuera de la muestra, se observa en la columna 8, en la columna 9 se observa el precio estimado por cada uno de los modelos y la columna 10, muestra el error absoluto medio, para cada modelo.

8. Conclusiones y trabajos futuros

En esta investigación se ha utilizado el entrenamiento supervisado, con la ventaja de que se pueden verificar los resultados predictivos y además compararlos con los precios observados.

La regla delta generalizada es el algoritmo de aprendizaje de la red neuronal seleccionada, que utiliza el mecanismo para corregir el error e ir modificando los diferentes pesos de las diferentes neuronas, hasta obtener un resultado óptimo o deseado, pero además que cumpla con los parámetros estadísticos ideales.

Para llevar a cabo esta comparación, se ha obtenido una muestra de 253 inmuebles de segmento medio, con precios de oferta con un factor de negociación de 5%, de esta manera trabajar con inmuebles de venta consumada.

Se concluye de acuerdo a los resultados que las redes neuronales artificiales y en específico perceptrón multicapa, utilizando funciones tangente hiperbólica y función sigmoidea, explica muy bien la variabilidad de los precios de los inmuebles; al estimar el precio de un inmueble fuera de la muestra para validar la metodología, es que la red multicapa con una función de activación en la capa oculta y sus diferentes salidas lineal, sigmoideal y tangente hiperbólica, los errores absolutos medios obtenidos son muy bajos.

Finalmente, se concluye la confirmación de partida donde se afirma que las redes neuronales artificiales estiman de forma más precisa los precios de los inmuebles.

9. Anexos

Figura 8.1.

Gráfica del precio observado y precio estimado por RNA.

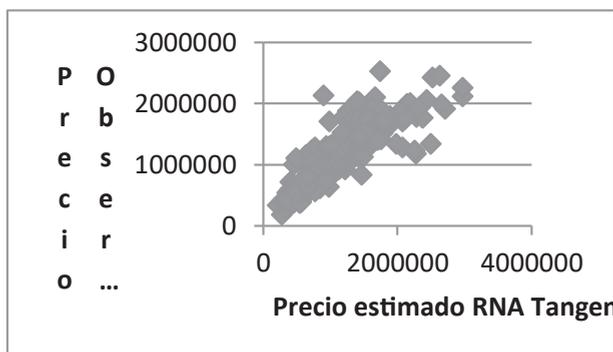


Figura 8.2.

Gráfica del precio observado y precio estimado por RNA.

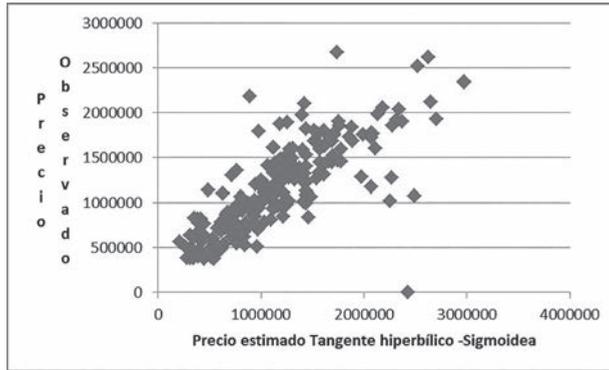


Figura 8.3.

Gráfica del precio observado y precio estimado por la RNA.

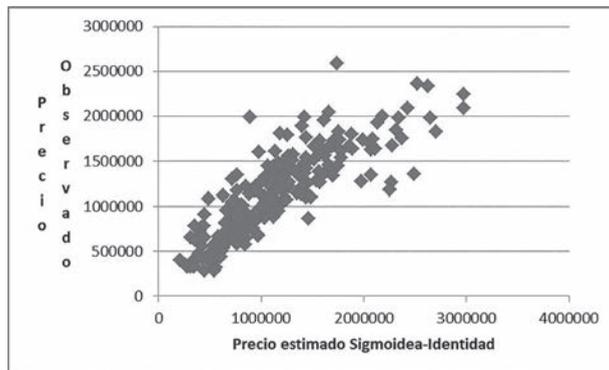
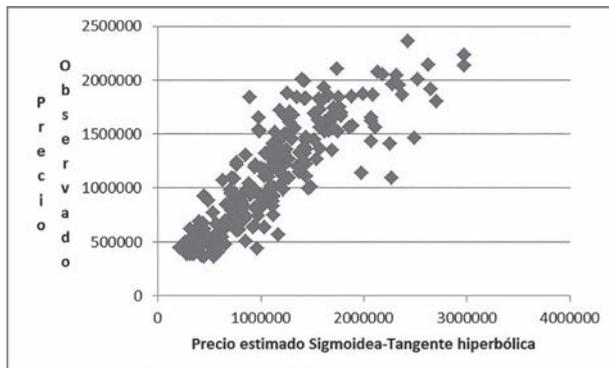


Figura 8.4.

Gráfica del precio observado y el precio estimado por RNA



10. Bibliografía

- Amabile, R. y Rosato, P. (1998). The use of neural networks in the spatial analysis of property values. Minneapolis, Minnesota: Sixth Joint Conference on Food, Agriculture and the Environment.
- Amri, S. Z. y Bossomaier, T. R. J. (2005). The Influence of Spatial Attributes on House Price. *Australia: Complexity International Volume 12*.
- Aznar Bellver, J. y López Perales, A.A. (2008). *Valoración inmobiliaria. Métodos y aplicaciones*. España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Caballer Mellado, V. y Herrerías Herrerías Pleguezuelo, R. (2007). Tasación y Valoración. Situación Actual y Perspectiva de Futuro. España: Estudios de Economía Aplicada, Asociación Internacional de Economía Aplicada España.
- López, F.A. (2013). Sistemas de información geográfica y econometría espacial en la tasación de inmuebles urbanos. Proyecto Piloto en la Ciudad de Cartagena. Cartagena: Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos Universidad Politécnica de Cartagena.
- Limsombunchai, V. (2004). House Price Prediction: Hedonic Price Model vs. Artificial Neural Network. New Zealand: Commerce Division, Lincoln University.
- Núñez et al (2009). Metodología de precios hedónicos vs redes neuronales artificiales como alternativa a la valoración de inmuebles. Un caso real.
- Fernández Durán, L., Llorca Ponce, A., Valero Cubas, S., Botti Navarro, V.J. (2012). Incidencia de la localización en el precio de la vivienda a través de un modelo de red neuronal artificial. Una aplicación a la ciudad de Valencia. España: Departamento de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia. CT catastro.
- Gallego Mora-Esperanza, J. (2004). La inteligencia artificial aplicada a la valoración de inmuebles. Un ejemplo para valorar Madrid. Madrid: CT catastro.
- Pi-ying, L. (2011). Analysis of the Mass Appraisal Model by Using Artificial Neural Network in Kaohsiung City. Taiwan, China: Journal of Modern Accounting and Auditing, Vol. 7, No. 10, pp. 1080-1089.
- Rossini, P. (1999). Application of Artificial Neural Networks to the Valuation of Residential Property. Nueva Zelanda: Third Annual Pacific-Rim Real Estate Society Conference.
- Preciado (2015). Valoración de inmuebles urbanos: comparativa modelo regresión multivariable *versus* redes neuronales artificiales para la ciudad de Morelia, Michoacán, México.