

COMPORTAMIENTO DEL IPC DE LA BMV DURANTE 2000-2009: UN ENFOQUE DE VALORES EXTREMOS*

Rosa María Domínguez Gijón**

Miguel Flores Ortega**

Francisco Venegas-Martínez**

Resumen

Esta investigación desarrolla un modelo de la dinámica de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) en el marco de la teoría de valores extremos y en particular lleva a cabo una aplicación de la distribución generalizada de Pareto. El análisis estadístico muestra que muchas de las observaciones son inusuales (grandes en valor absoluto) y que no pertenecen al mundo de la distribución Normal. De hecho se muestra que dichas observaciones superan sistemáticamente un umbral. El objetivo principal es mostrar que el enfoque de valores extremos con picos proporciona una descripción más adecuada de los rendimientos del IPC que los modelos que solamente emplean el supuesto de normalidad.

Clasificación JEL: D53; C14 y C81.

Palabras clave: mercados financieros; modelos semiparamétricos y modelos estadísticos.

* El artículo fue recibido el 15 de enero y aceptado el 6 de julio de 2012. Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de los dictaminadores anónimos que enriquecieron el presente trabajo. Los errores restantes y los puntos de vista son responsabilidad exclusiva de los autores.

** Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. Correo electrónico: rossy13pink@hotmail.com; mfo@prodigy.net.mx; fvenegas1111@yahoo.com.mx

Abstract

This paper develops a dynamic model of the returns of the Stock Market Index of the Mexican Stock Exchange within the framework of the theory of extreme values and, in particular, carries out an application of the Generalized Pareto Distribution. The statistical analysis shows that many of the observations are unusual (large in absolute value) and do not belong to the world of the normal distribution. In fact, it is shown that these observations consistently exceed a threshold. The main objective is to show that the extreme value approach with peaks provides a more accurate description of the returns the Stock Market Index than those models which use only the normality assumption.

Keywords: financial markets; semiparametric models and statistic models.

1. Introducción

La teoría de valores extremos proporciona un conjunto de modelos y métodos, tanto paramétricos como no paramétricos, para describir y explicar el comportamiento de los precios y los rendimientos de los diferentes activos financieros, disponibles en el mercado, en condiciones poco usuales, es decir, en periodos de crisis o inestabilidad. No todos los días se reportan rendimientos considerablemente altos (auges) o bajos (caídas) tanto en activos individuales como en portafolios de inversión, lo cual ocurre ocasionalmente como consecuencia de una crisis desencadenada por embates especulativos. La literatura especializada sobre valores extremos y sus aplicaciones en los campos de la economía y las finanzas es muy amplia; véanse, por ejemplo: Coronado (2000), Dieter y Michael (2007), Gander (2009), Lebaron y Ritirupa (2004), McNeil (1999), McNeil y Frey (1996) y (2000), Meleverage y Sornette (2006), Rachlin (2006) y Wei-han Liu (2002).

La teoría de valores extremos es utilizada en el área de finanzas para modelar el comportamiento de los rendimientos financieros de magnitud extrema, estos eventos no se presentan de manera frecuente, más bien se presentan de manera ocasional, en cuyo caso una distribución de probabilidad de valores extremos, como Gumbell (1958), Fréchet (1937) y Weibull (1939) y (1951), podría modelar más

apropiadamente los excesos sobre una cantidad fija que el modelo clásico Normal

El desarrollo de los fundamentos de la teoría de valores extremos se debe a los trabajos de Von Mises (1923), Gnedenko (1943) y Fisher y Tippet (1928), cuyos resultados teóricos llevaron a la caracterización de una distribución asintótica para modelar valores máximos o mínimos de un conjunto de observaciones, denominada distribución generalizada (*generalized extreme value distribution*). Asimismo, los hallazgos de Pickands (1975) y Balkema (1974) dieron lugar a una distribución de los excesos por encima de un umbral, la llamada distribución generalizada de Pareto.

Un análisis estadístico simple, como la gráfica Q-Q (*Quantiles vs. Quantiles*), de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) muestra que, durante el periodo 2008-2009, éstos no se ajustan a la distribución Normal. De hecho se observa que se alejan de la diagonal principalmente en sus extremos, lo cual podría deberse a la presencia de colas anchas. La presente investigación se concentra en explicar la dinámica de los rendimientos del IPC y se sustenta en el marco de la teoría de valores extremos y, en particular, en la aplicación de la distribución generalizada de Pareto.

Este trabajo está organizado en siete apartados: en la sección 2 se realiza una breve revisión de la teoría de valores extremos; en el transcurso de la sección 3 se describen los modelos de pico sobre un umbral; en la sección 4 se lleva a cabo una aplicación de la teoría de valores al exceso del IPC; a través de la sección 5 se plantea el modelo propuesto de valores extremos; en la sección 6 se discuten los resultados empíricos obtenidos; por último, en la sección 7 se presentan las conclusiones.

2. Una revisión de la teoría de valores extremos

Una de las distribuciones relevantes de la teoría de valores extremos es la distribución generalizada de Pareto, la cual es útil en el modelado de los valores extremos que exceden un determinado umbral o cantidad fija. Asimismo, los resultados teóricos de Pickands (1975) y Balkema (1974) muestran que bajo ciertas condiciones en los dominios de atracción, la distribución generalizada de Pareto modela adecuadamente los excesos sobre un umbral cuando este es elevado. En efecto, sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, que

representan los rendimientos logarítmicos de un activo o índice bursátil, con una función de distribución acumulada desconocida $F(x) = P\{X_1 < x\}$. Por el momento, se supone que $X_i \geq 0$ véase, por ejemplo, Balzarotti, (2001). El máximo M_n de un conjunto de n observaciones se define como

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1)$$

En este caso, la función de distribución del máximo está dada por

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(x) = F^n(x) \quad (2)$$

La aproximación asintótica para la función de distribución del máximo se define mediante el máximo valor estandarizado

$$Z_n = \frac{M_n - u_n}{\sigma_n}, \quad \sigma_n > 0 \quad (3)$$

donde u_n son parámetros de localización y σ_n son parámetros de escala. El teorema de Fisher-Tippet (1928) establece que si el máximo valor estandarizado converge a una distribución no degenerada, ésta es la distribución generalizada de valor extremo:

$$H_\xi(z) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi z))^{-\frac{1}{\xi}} & \text{con } \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-z}) & \text{con } \xi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Esto es equivalente a decir que F está en el dominio de atracción de $H_\xi(z)$. Este resultado se usa en la práctica para hacer inferencias sobre el máximo.

Si se consideran X_1, \dots, X_T variables aleatorias con función de distribución de frecuencia desconocida. Y posteriormente se divide la muestra en m bloques distintos, de tamaño $n = T/m$ y se supone que n es lo suficientemente grande, entonces se puede aplicar el teorema de Fisher-Tippet. Sin embargo surgen algunas limitaciones, si se tiene una muestra de datos que comprenden, por ejemplo, un periodo de 10 años y los bloques se construyen de un año, sólo se obtiene 10 datos del máximo, uno por cada bloque (Cardozo, 2004), lo cual es una desventaja para el análisis estadístico.

Por lo anterior, intentar modelar los valores máximos de cada bloque de datos con una distribución de valores extremos no es práctico porque se requiere de una muestra muy grande. Un método más eficiente es modelar los valores extremos que exceden un umbral o cantidad fija. Este concepto de la teoría de valores extremos se conoce como picos sobre un umbral (Cardozo, 2004). En estos modelos se elige un umbral y se supone que las observaciones que exceden el umbral siguen una distribución paramétrica conocida como, por ejemplo, una distribución generalizada de Pareto, la cual está dada por:

$$G_{\xi, \beta(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta(u)}\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

donde μ es el parámetro de localización, β es el parámetro de escala y ξ es el parámetro de forma. En este caso, la distribución de los valores excedentes converge a una distribución generalizada de Pareto a medida que el umbral aumenta. Las distribuciones de valores excedentes que convergen a una distribución generalizada de Pareto pertenecen a la clase de las distribuciones continuas que son muy comunes en inferencia estadística, las cuales se dividen en tres grupos de acuerdo al valor del parámetro que da la forma de la función de distribución, ξ . El caso en el que el parámetro ξ sea mayor a cero corresponde a distribuciones de colas pesadas, en la que la cola decae como una función de potencia, tal y como lo hacen las distribuciones de tipo Pareto. En caso de que el parámetro ξ sea igual a cero, la cola decae exponencialmente como en los casos de la normal y la exponencial que tienen colas muy delgadas. En el último caso cuando ξ es menor a cero, corresponde a distribuciones que tienen colas cortas con final finito como las distribuciones beta.

En virtud de la discusión anterior, una aproximación para la distribución de frecuencia de x con $x > u$, es decir, con x excediendo a un umbral u , se puede obtener al tener en cuenta que si se escribe $x = u + y$, entonces

$$F(x) = (1 - F(u)) G_{\xi, \beta(u)}(y) + F(u) \quad (6)$$

En este caso, el estimador empírico de la distribución $F(u) = P\{X < u\}$ es:

$$\hat{F}(u) = \frac{u - N_u}{n} \quad (7)$$

donde $\hat{F}(u)$ es el estimador empírico del umbral, n es el número de observaciones en la muestra y N_u es el número de observaciones que exceden el umbral. Después de sustituir la ecuación (7) en la expresión (5) y teniendo en cuenta que $y = x - u$, se obtiene el siguiente estimador para $F(x)$:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{\alpha}{\xi}} \quad (8)$$

el cual es válido para valores $x > u$. El argumento, u , del parámetro de colocación se omite para facilitar la notación.

Tres de las funciones de densidad de probabilidad más comunes, la exponencial, la de Pareto y la Beta están incluidas en la distribución de probabilidad generalizada de Pareto y se presentan a continuación. La función de densidad de probabilidad exponencial está dada por:

$$W_0(x) = 1 - e^{-x} \text{ y } w_0(x) = e^{-x}, \quad (9)$$

y está definida para toda $x \geq 0$. Asimismo, la función de densidad de probabilidad de Pareto está dada por

$$W_1(x) = 1 - x^{-\alpha} \text{ y } w_1(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)}, \quad (10)$$

definida para toda $x > 1$ y $\alpha > 0$. Por último, la función de densidad de probabilidad Beta está dada por

$$W_1(x) = 1 - (-x)^{-\alpha} \text{ y } w_2(x) = -\alpha(-x)^{-(1+\alpha)}, \quad (11)$$

definida para toda $-1 \leq x \leq 0$ y $\alpha < 0$.

En términos generales, hay dos formas de modelar los valores extremos que exceden una cantidad fija. Los modelos más viejos que son los de bloques máximos que se utilizan para conjuntos grandes de observaciones idénticamente distribuidas, y los modelos de picos sobre un umbral, estos últimos son, recientemente, más usados en aplicaciones financieras porque permiten un mejor modelado de volatilidad extrema. En este trabajo nos enfocaremos al uso de modelos de picos sobre el umbral.

3. Modelo de picos sobre un umbral

En el modelo de picos sobre un umbral se distinguen, a su vez, dos tipos de análisis: los modelos semiparamétricos que son construidos a partir del estimador de Hill (1975) y los modelos paramétricos basados en la distribución de Pareto. Por cuestiones de simplicidad se toma el modelo basado en la distribución generalizada de Pareto. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias idénticamente distribuidas con una función de distribución desconocida $F(x) = P\{X_i < x\}$. La distribución de valores que exceden un umbral u preestablecido se define mediante la expresión

$$F_u(y) = P\{X - u \leq y | X > u\}, \quad 0 \geq y < x_0 - u. \quad (12)$$

La distribución de los excesos F_u representa la probabilidad de que la pérdida exceda el umbral u a lo más en una cantidad y , condicionado a la información de que la pérdida excedió el umbral. La expresión (12) se puede reescribir en términos de la frecuencia incondicional de la siguiente manera

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (13)$$

donde $F_u(y)$ es la distribución de los excesos y u es el umbral seleccionado. Un resultado fundamental de la teoría de valores extremos es el teorema de convergencia en donde se utiliza la distribución generalizada de Pareto, la cual está dada por:

$$F_u(y) = G_{\xi, \beta}(y). \quad (14)$$

Al utilizar las ecuaciones (6) y (14) y considerando que $x = u + y$, se sigue que

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u), \quad \text{para } x > u. \quad (15)$$

Utilizando la expresión (3) se construye la distribución de las colas y para ello es necesario un estimador empírico de la distribución. Por lo tanto, en virtud de (8), se sigue que

$$\tilde{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \xi \frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}} \quad (16)$$

la cual es válida sólo para valores de $x > u$ aquí $\tilde{F}(x)$ es el estimador de las observaciones que superan al umbral.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que el estimador de Hill (1975) es muy usado en el estudio de las series con distribuciones de colas gordas. El estimador de Hill está basado en X_1, X_2, \dots, X_n y se obtiene ordenando las observaciones de mayor a menor. Así, el estimador Hill de orden $K+1$ se define como:

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}} \quad (17)$$

Este estimador tiene diversas propiedades que pueden ser explotadas en el análisis estadístico de valores extremos.

4. Aplicación de la teoría de valores al exceso en los rendimientos del IPC

A continuación se lleva a cabo una aplicación de la teoría de valores a los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

4.1 Análisis estadístico de los datos

Los datos que se utilizan en esta investigación corresponden a los precios de cierre diarios del IPC de la BMV en el periodo comprendido entre enero de 2000 y agosto de 2009. Estas observaciones se presentan en la Gráfica 1.

Gráfica 1

Comportamiento histórico del IPC



Fuente: elaboración propia con datos de *Economática*.

El rendimiento logarítmico se calcula posteriormente utilizando los niveles de cierre diario del IPC en el periodo seleccionado utilizando la siguiente expresión:

$$\log RP = \log \frac{P_t}{P_0} \quad (18)$$

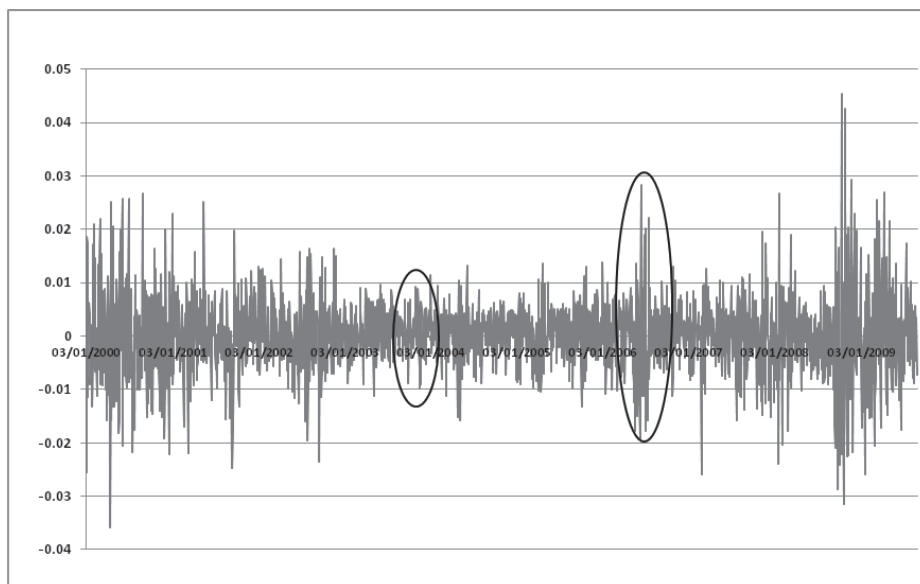
donde $\log RP$ es el rendimiento logarítmico del índice de precios y cotizaciones, P_t es el nivel del índice de precios y cotizaciones y P_0 es el nivel de día anterior.

La Gráfica 2 muestra el comportamiento del rendimiento diario logarítmico del índice de precios y cotizaciones en el periodo comprendido entre los años 2000 y 2009. Se observa que la volatilidad no es constante, lo que implica que la serie de datos es heteroscedástica y se confirma también que la serie presentan agrupamientos de baja y alta volatilidad; véanse, al respecto, Mandelbrot (1963) y Fama (1965). El rendimiento promedio es superior a cero por 1.82 diezmilésimos, lo cual está muy próximo a cero y la desviación estándar es 0.021. El tercer momento, que muestra la asimetría, presenta un sesgo positivo que indica la concentración de

los valores del lado derecho, es decir, hay más auges que caídas, de hecho, esto se ve en la tendencia creciente en el largo plazo del IPC.

Gráfica 2

Rendimientos logarítmicos del IPC de enero de 2000 a agosto de 2009

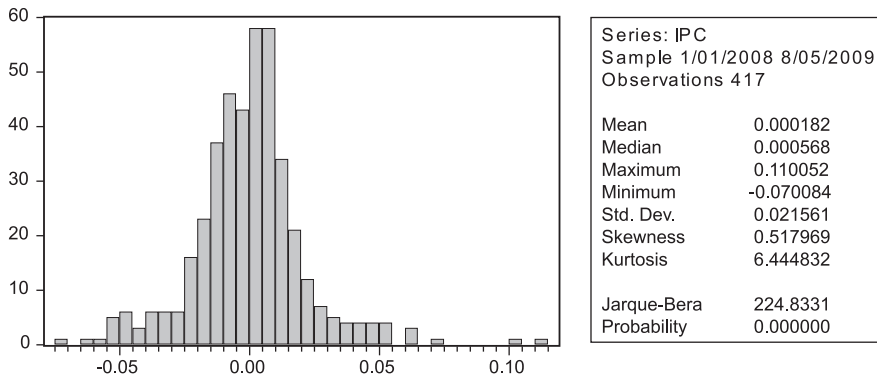


Fuente: elaboración propia con datos de *Económica*.

Por otro lado, el valor de la curtosis es de 6.44 que corresponde al doble de la distribución normal (estándar), con los resultados obtenidos se encuentra que la distribución de los rendimientos no corresponden a la distribución normal. De esta manera la distribución empírica presenta una mayor concentración en el centro y colas anchas. Asimismo, con la prueba Jarque-Bera se rechaza la normalidad en la serie analizada. El histograma de frecuencias y los parámetros de análisis se presentan en la Gráfica 3.

Gráfica 3

Estadísticos descriptivos del índice de precios y cotizaciones



Fuente: elaboración propia con datos de *Económica*.

5. Modelo propuesto de valores extremos

La metodología utilizada emplea los rendimientos de la serie del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores en el periodo 2000-2009. Como primer paso se determina que tan próxima es la distribución empírica a la distribución normal, se observa que la kurtosis tiene un valor alto lo cual conduce a la presencia de colas anchas, esto incrementa la posibilidad de valores anormales y de encontrar valores extremos.

Una prueba alternativa para constatar que la distribución de los rendimientos no se aproxima a una distribución normal, se hace al aplicar el gráfico Q-Q o gráfico cuantil-cuantil. Si el gráfico se presenta como una recta de 45°, se concluye que los rendimientos de la distribución empírica son similares a los de la distribución normal paramétrica, en cambio si el gráfico no se presenta como una recta de 45°, entonces no se comporta como una distribución normal, lo cual justifica la aplicación de la teoría de valores extremos. Una vez seleccionado el umbral, se debe constituir una submuestra que contenga todos los valores que superen a ese

umbral. Esta submuestra será la que se debe utilizar para estimar la distribución generalizada de Pareto.

Se utilizarán los rendimientos menores al umbral para estimar los parámetros de la distribución general de Pareto, la cual está dada por

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} & \text{con } \varepsilon \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} & \text{con } \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Los parámetros ε y β se estiman con el método de mínimos cuadrados. Los valores estimados permitirán establecer si los rendimientos tanto superiores como inferiores del índice mercado accionario mexicano se ajustan.

6. Resultados empíricos

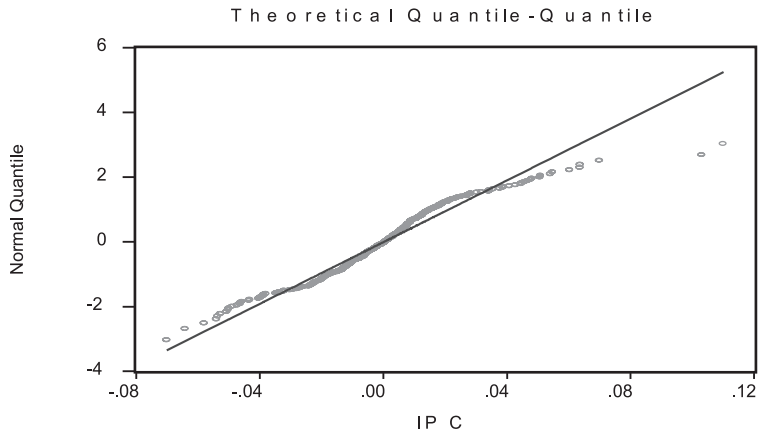
Se observa que en el periodo de 2000 a 2009 el IPC tiene una mayor presencia de rendimientos positivos. El estadístico Jarque-Bera indica que los datos no provienen de una distribución normal. Se rechaza la hipótesis de normalidad de los rendimientos, a la vez que el máximo y mínimo con respecto de la media arroja valores que son altamente improbables en una distribución Normal.

El contraste de los rendimientos del IPC con la distribución teórica normal, se observa a través de la Gráfica 4, la gráfica Q-Q. Se observa que la distribución teórica ajusta adecuadamente la información central pero no así en las colas inferior y superior, lo cual puede conducir a existencia de valores extremos para modelar la distribución de los rendimientos mínimos y máximos.

La submuestra que se utilizó del índice de precios y cotizaciones fue de enero de 2008 a agosto de 2009, la cual aparece en la grafica 5. El criterio de selección de esta submuestra se basa en la alta volatilidad del periodo en cuestión. Se seleccionarán los valores que exceden el umbral de referencia para estimar los valores de los parámetros de la distribución generalizada de Pareto. El umbral seleccionado es 0.04, este se determinó por ser el que supera más de tres desviaciones estándar. Se observa que en el período de análisis los rendimientos superan al umbral y presentan mayor volatilidad; véase la gráfica 6.

Gráfica 4

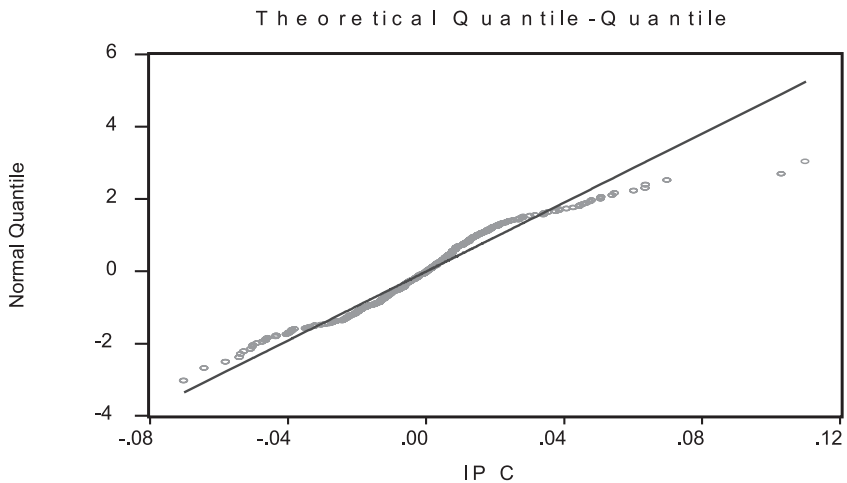
Prueba Q-Q del índice de precios y cotizaciones



Fuente: elaboración propia con datos de *Económica*.

Gráfica 5

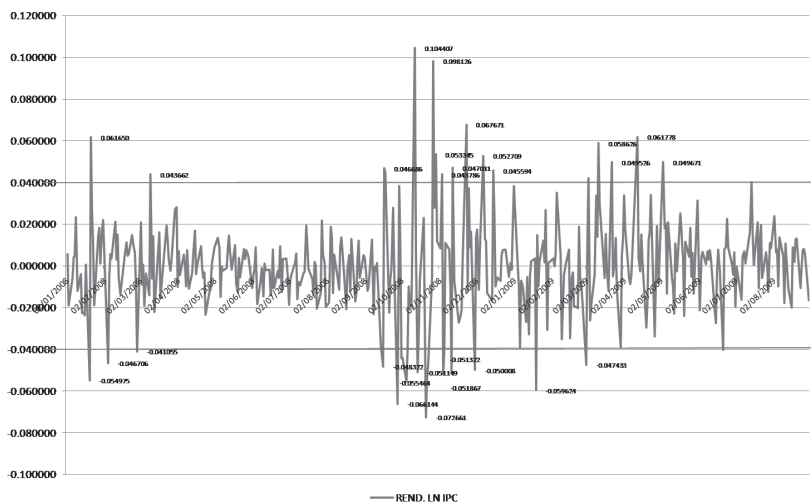
Sub-muestra del IPC 2008-2009



Fuente: elaboración propia con datos de *Económica*.

Gráfica 6

Submuestra del IPC 2008-2009 y selección sobre el umbral



Fuente: elaboración propia.

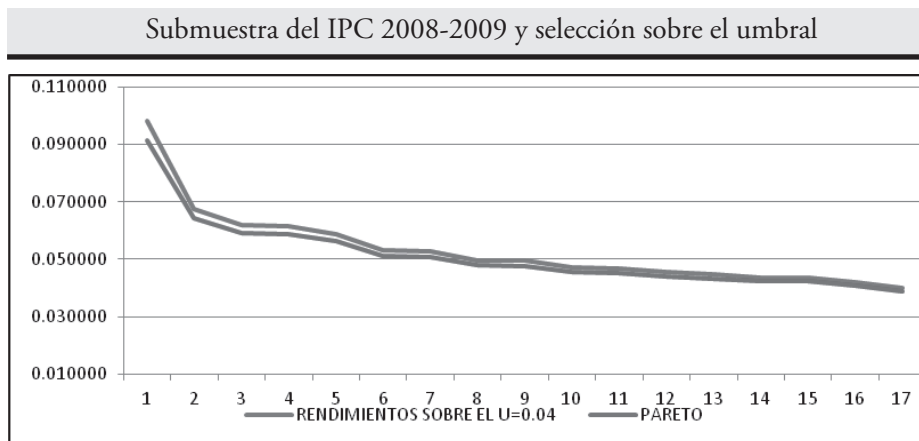
A continuación se utilizaron los rendimientos menores al umbral seleccionado para estimar los parámetros ε y β , y posteriormente se estimará la distribución generalizada de Pareto dada en la expresión (19). En esta investigación se tomó una submuestra de 17 observaciones de los rendimientos del índice de precios y cotizaciones que superan el valor del umbral que es igual a 0.04 del periodo de enero de 2008 a agosto de 2009 donde se puede observar que en los meses de septiembre a diciembre de 2008 se presentaron rendimientos de magnitudes grandes a raíz de la fluctuaciones que se presentaron en el mercado financiero mundial, situación que se prolongó hasta los primeros meses de 2009, como se muestra en el Cuadro 1. Es importante destacar que la distribución de Pareto sólo permite modelar valores extremos positivos que superan un umbral; para el caso de valores extremos negativos se podría utilizar, por ejemplo, la distribución Weibull.

Cuadro 1

Submuestra del IPC 2008-2009 y selección sobre el umbral					
MUESTRA DEL RENDIMIENTO DEL INDICE DE PRECIOS Y COTIZACIONES QUE SUPERAN EL UMBRAL					
FECHA	REND. LOG	FECHA	REND. LOG	FECHA	REND. LOG
22/01/2008	0.061650	04/11/2008	0.043786	12/03/2009	0.058626
11/03/2008	0.043662	13/11/2008	0.047011	23/03/2009	0.049526
18/09/2008	0.046686	24/11/2008	0.067671	13/04/2009	0.061778
19/09/2008	0.044683	08/12/2008	0.052709	04/05/2009	0.049671
28/10/2008	0.098126	16/12/2008	0.045594	15/07/2009	0.040092
30/10/2008	0.053345	04/03/2009	0.041916	total	0.906531
				PROMEDIO	0.05332534

Fuente: elaboración propia.

Gráfica 7



Fuente: elaboración propia.

Un factor importante en el análisis estadístico fue la elección del umbral ya que esto da la pauta para la distribución de los valores que están por arriba o por abajo de dicho umbral, esto permitirá modelar adecuadamente los rendimientos del IPC con una distribución de valores extremos. Los resultados empíricos encontrados

muestran que la distribución generalizada de Pareto permite modelar adecuadamente los rendimientos de magnitudes superiores al umbral seleccionado, para verificar estos resultados se recomienda utilizar otros modelos como la distribución de Fréchet y Weibull.

7. Conclusiones

A partir de las pruebas estadísticas realizadas para ajustar una distribución de valores extremos y poder describir el comportamiento del índice de precios y cotizaciones en el periodo de enero 2008 a agosto 2009 se encontró que la distribución generalizada de Pareto modela adecuadamente el comportamiento de los rendimientos diarios. Un resultado relevante de la investigación es que la teoría de valores extremos explica apropiadamente las fluctuaciones del rendimiento del IPC del mercado financiero mexicano cuando se presenta una crisis internacional como la ocurrida en el periodo de estudio.

El rasgo más significativo que presentó la serie de rendimientos del índice de precios y cotizaciones fue el exceso de curtosis, fenómeno que conlleva a la consideración de colas anchas. De hecho la curtosis presentó un valor de 6.44, el cual es más del doble de la curtosis de una distribución normal estándar, esto justifica el uso de una distribución de valores extremos para modelar rendimientos de magnitudes superiores al umbral seleccionado.

Referencias

- Cardozo, P. (2004), "Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la teoría de valores extremos", *Borradores de Economía*, Banco de la República. Colombia.
- Coronado, M. (2000), "*Extreme Value Theory for Risk Managers: Pitfalls and Opportunities in the Use of EVT in Measuring Var*", Facultad de Ciencias Economicas y Empresariales, ICADE Universidad P. Madrid.
- Dieter, R. R. y T. Michael (2007), *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser, 3th edition.

- Fama, E. (1965), The "Behaviour of Stock Prices", *Journal of Business*, 38, 34-105.
- Fisher, R. A., y Tippett, L. H. C. (1928), "*Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180.
- Fréchet, M., (1927), "*Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. Ann*". Soc. Polon. Math. 6, 93.
- Gander, J. P. (2009), *Extreme Value Theory and the Financial Crisis of 2008*, Department of Economics, University of Utah. USA.
- Gnedenko, B. V. (1943), "*Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire*", Annals of Mathematics, 44, 423.
- Gumbel, E.J. (1958), "*Statistics of Extremes*", Columbia University Press, New York.
- Hill B. M. (1975), "*A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution*", The Annals of Statistics, 5, 1163-1174.
- Lebaron, B. y S. Ritirupa (2004), "Extreme Value Theory and Fat Tails in Equity Markets", *Working paper*, Brandeis University.
- Mandelbrot, B. (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, 394-419.
- McNeil A. J. (1999), "*Extreme Value Theory for Risk Managers*", ETH Zurich Department Mathematik, Alemania.
- McNeil, A. J. y R. Frey (1996), "*Estimation the tails of loss severity distributions using extreme value theory*", ETH Zurich Department Mathematik, Alemania.
- McNeil, A. y R. Frey (2000), "*Estimation of tail-related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach*", ETH Zurich Department Mathematik, Alemania.
- Melevergne, Y. y D. Sornette (2006), "*Extreme Financial Risks*", New York.
- Rachlin, J. (2006), "*Principal component analysis and extreme value theory in financial applications Faculty of Princeton*", USA.
- Wei-han, L. (2002), "*A Closer Examination of Extreme Value Theory Modeling in Value at Risk Estimation*", Taipei Department of Banking and Finance.
- Weibull, W. (1951), "A Statistical Distribution of Wide Applicability", *Journal of Applied Mechanics*, 18, 3, 293-297.
- Weibull, W. (1939), "*A statistical theory of the strength of materials*". Proceedings of the Royal Swedish Institute for Engineering Research No. 151.