

Un sistema lineal de expectativas racionales para la política monetaria óptima discrecional

A linear system of rational expectations of the optimal discretionary monetary policy

Eddy Lizarazu ^{a *}

Resumen

Una restricción de los modelos lineales de expectativas racionales es que no siempre tienen una solución cerrada. A pesar de ello, es instructivo obtener una solución numérica del modelo estocástico. Esta contribución expone el mecanismo de la política monetaria óptima discrecional bajo incertidumbre en términos de un sistema lineal de expectativas racionales. Para ello, tomamos en cuenta el modelo de Clarida, *et al.* (1999), reproducimos su solución analítica, aunque también mostramos algunos resultados numéricos del modelo para determinados valores de los parámetros. La caracterización de la política monetaria óptima de un banco central adverso de la inflación o amante de la producción-empleo es posible gracias a las funciones impulso-respuesta para un choque negativo de oferta agregada de un nivel de persistencia alto o bajo.

Palabras claves: descomposición de Schur, expectativas racionales, funciones impulso-respuesta, modelo neokeynesiano, política monetaria óptima

Abstract

One restriction of linear models of rational expectations is that they do not always have a closed solution. Despite this, it is instructive to obtain a numerical solution of the stochastic model. This contribution exposes the optimal discretionary monetary policy mechanism under uncertainty in terms of a linear system of rational expectations. For this, we take into account the Clarida's model, *et al.* (1999), we reproduce its analytical solution, although we also show some numerical results of the model for certain values of the parameters. The characterization of the optimal monetary policy of an inflation-adverse or output-employment-loving central bank is possible thanks to the impulse-response functions for a negative aggregate supply shock of a high or low persistence level.

Keywords: impulse-response functions, New Keynesian model, optimal monetary policy, rational expectations, Schur decomposition

^a Profesor e investigador Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa

* Autor de correspondencia

1. Introducción

En los últimos años hemos sido testigos de la evolución en la formulación de la política monetaria. Muchos bancos centrales ahora buscan de manera más explícita determinados objetivos de política monetaria¹. El desarrollo de los modelos de equilibrio general dinámicos estocásticos (DSGE por sus siglas en inglés) ha jugado un papel clave en este proceso². Estos modelos se basan en criterios microeconómicos y enfatizan la elección intertemporal de los agentes económicos. Las elecciones actuales que dependen de resultados futuros inciertos hace que estos modelos sean dinámicos por asignar un papel preponderante a las expectativas de muchas variables en la determinación de resultados macroeconómicos.

El uso de modelos DSGE como herramienta para la formulación de políticas económicas, a la vez, está influyendo de manera expresiva el ámbito académico³. La microeconomía intertemporal subyacente en los modelos DSGE genera un sistema de ecuaciones no-lineales acompañado de una gama amplia de parámetros. La resolución de estos modelos es compleja, pero este se facilita al obtener ecuaciones log-linealizadas. Empero, sin sacrificar el rigor de la formalización matemática es posible profundizar en el análisis económico a partir de estos modelos lineales⁴. Sin embargo, aun estos sistemas de ecuaciones estocásticas lineales en tiempo discreto siguen siendo menos conocidos por el público en general. En consecuencia, es provechoso un adiestramiento didáctico a propósito de la formulación de la política monetaria óptima discrecional bajo incertidumbre en términos de un sistema lineal de expectativas racionales.

Una restricción de los modelos lineales de expectativas racionales es que no necesariamente tienen una solución cerrada. En estos casos, se busca soluciones numéricas del sistema lineal de expectativas racionales, dado los valores de los parámetros. En este artículo se proporciona un procedimiento de resolución numérica aplicado al sistema lineal de la política monetaria óptima discrecional siguiendo el método recomendado por Klein (2000). El modelo de política monetaria que estudiamos se explica extensamente en Clarida, *et al.* (1999). En términos muy generales, la política monetaria óptima se erige en dos niveles de reflexión, discrecional y de compromiso. Dado las expectativas del público, el primero tiene más aplicaciones en las decisiones de la política monetaria del día a día, mientras que el carácter de un compromiso vinculante de la autoridad monetaria para el curso futuro de su actuación afectan de manera importante en las expectativas de los agentes. En este artículo nos limitamos únicamente a la política monetaria óptima discrecional en dos escenarios: un banco central hostil a la inflación y un banco central amante de la producción-empleo. Por supuesto, consideramos el caso intermedio como referencia, y además, también contemplamos la posibilidades de niveles de persistencia altos y bajo en el choque negativo de oferta agregada⁵.

¹ En una buena parte del mundo, los bancos centrales operan bajo un esquema de inflación objetivo. Véase a Taylor (1993), Svensson (1997, 2003), entre otros.

² Una exposición de esta clase de modelos se encuentra en Galí & Gertler (2007). Galí (2008), Ljungqvist & Sargent (2004), Walsh (2003) y Woodford (2003) proporcionan un tratamiento más exhaustivo.

³ Un ejemplo de esto es Costa (2016), incluyendo el debate sobre su enseñanza en licenciatura. Véase a Colander (2018), Moreno-Rivas (2018), Neumuller *et al.* (2018), Setterfield (2018) y Solis-García (2018).

⁴ Las linealizaciones logarítmicas se han utilizado ampliamente en los últimos años siguiendo el trabajo de Blanchard & Khan (1980). Uhlig (1999) ha sistematizó la metodología y proporcionó software útil para resolver una variedad de problemas.

⁵ Uno de los resultados de la política monetaria óptima es su capacidad para neutralizar los choques de demanda agregada. En consecuencia, la exposición se centra únicamente en el impacto de los choques de oferta agregada, así como en la reacción del banco central al fijar la tasa de interés nominal.

Este documento está organizado en seis secciones. En la segunda sección proporcionamos una solución analítica al núcleo de tres ecuaciones. En la segunda sección presentamos un dispositivo gráfico que tiene por objeto ilustrar el impacto en la economía de una relajación en la meta de inflación, así como la reacción del banco central a los choques exógenos súbitos de demanda y oferta agregadas. En la cuarta sección usamos el método de descomposición de Schur para desacoplar el sistema lineal de expectativas racionales en términos de las variables predeterminada y no-predeterminadas. En la quinta sección nos enfocamos a choques adversos de la oferta agregada y resolvemos numéricamente el modelo estocástico para determinados valores de los parámetros. Las funciones impulso-respuesta bajo diferentes contextos nos permiten tipificar la política monetaria óptima. Por último, en la sexta sección, hacemos algunos comentarios de conclusión.

2. El núcleo de ecuaciones

Analizamos una economía cerrada en ausencia de gobierno y sin acumulación de capital físico. Las variables endógenas incluyen a la brecha del producto x_t la tasa de inflación π_t y la tasa de interés nominal i_t . El modelo admite las siguientes relaciones agregadas: 1) la nueva ecuación IS, 2) la nueva curva de Phillips y 3) una regla de tasa de interés óptima para conducir la política monetaria. Este conjunto de ecuaciones es denominado, el 'núcleo del sistema lineal de expectativas racionales' de un modelo de política monetaria óptima discrecional.

La nueva ecuación IS es distinta de la tradicional porque la demanda de producto real (brecha económica) del período corriente x_t depende positivamente de la expectativa racional del producto del período contiguo futuro $E_t x_{t+1}$. Por otro lado, la demanda de producto real x_t depende negativamente de la tasa de interés real esperada⁶. Esta relación implica una suavización del consumo a lo largo del tiempo, de modo que las familias descartan los extremos; es decir, no despilfarran todo para no tener nada en su vejez. Por el contrario, dosifican razonablemente el consumo a lo largo del tiempo dejando algo para su vejez⁷. La ecuación de abajo denota a la nueva ecuación IS⁸.

$$x_t = E_t x_{t+1} - \sigma(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \epsilon_{1t} \quad (1)$$

El parámetro σ está relacionado con la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo presente y futuro debido a que los cambios en los precios relativos intertemporales implican que la tasa de interés real afecta a las decisiones de consumo presente y el consumo futuro⁹.

La variable ϵ_{1t} captura los disturbios exógenos de la demanda agregada. Se asume que este disturbio es un proceso autorregresivo estacionario exógeno. La estacionariedad de este proceso estocástico se garantiza por la propiedad $|\rho| < 1$.

$$\epsilon_{1t} = \rho \epsilon_{1t-1} + \hat{\epsilon}_{1t} \quad (2)$$

⁶ La tasa de interés se aproxima por la diferencia entre la tasa de interés nominal y las expectativas de inflación futura, es decir, $i_t - E_t x_{t+1}$.

⁷ Más formalmente, la nueva ecuación IS se deduce de la ecuación de Euler, la cual denota a la condición necesaria de optimización dinámica.

⁸ En general, si z_t en un vector de variables económica, entonces $E_t z_{t+1} = E(z_{t+1} | \Omega_t)$ donde $E(\cdot)$ es el operador de expectativa matemática Ω_t es el conjunto de información disponible en t . Suponemos que todos los agentes tienen la misma información en un momento dado.

⁹ Los términos $E_t x_{t+1}$ y $E_t \pi_{t+1}$ denotan a las expectativas racionales del producto futuro (brecha de producción) y la tasa de inflación para el período próximo, condicionados al conjunto de información Ω disponible.

donde, el término $\hat{\epsilon}_{1t}$ es un *ruido blanco*.¹⁰

La nueva curva de Phillips establece una relación positiva de la tasa de inflación del período corriente π_t , con la expectativa racional de la tasa de inflación futura $E_t \pi_{t+1}$ descontada y con la brecha del producto x_t .¹¹

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + \epsilon_{2t} \quad (3)$$

Esta ecuación incluye un disturbio inflacionario exógeno ϵ_{2t} el cual también es un proceso autorregresivo estacionario.¹²

$$\epsilon_{2t} = \psi \epsilon_{2t-1} + \hat{\epsilon}_{2t} \quad (4)$$

donde, otra vez, asumimos que el término $\hat{\epsilon}_{2t}$ es un ruido blanco.

La regla de tasa de interés óptima refleja esencialmente las pretensiones de la autoridad monetaria. Una forma de proceder es asumir que el banco central minimiza una función de pérdida social de los estados presentes y futuros de la economía sujeto a la estructura de la economía. Es decir, el hacedor de la política monetaria pretende que la economía funcione en su nivel de ocupación plena, al tiempo que persigue un objetivo de tasa de inflación.

La formalización más simple de esta última idea es una función de pérdida social cuadrática.

$$L = \frac{1}{2} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i (x_{t+i}^2 + \alpha \pi_{t+i}^2) \quad (5)$$

donde δ es un factor de descuento apropiado y α es un factor de ponderación entre la tasa de inflación y la brecha de producción.¹³

En la ausencia de compromisos vinculantes el banco central elige la tripleta (x_t, π_t, i_t) . Es decir, en este conjunto, esta inmerso dos variables objetivo y un instrumento. Las variables objetivos son el producto potencial \bar{y}_t y la tasa de inflación $\bar{\pi}_t$ nula. El instrumento es la tasa de interés nominal i_t .¹⁴

La minimización de la función L está sujeta a la curva de Phillips y a la ecuación IS. Sin embargo, en el caso discrecional, el banco central asume que sus acciones no tienen incidencia en las expectativas del público. Siguiendo a Clarida, *et al.* (1999), dadas las expectativas, el cálculo de optimización es secuencial en el tiempo. El banco central elige x_t y π_t de la función de bienestar social.

$$L = \frac{1}{2} (z_t^f + \alpha \pi_t^2) + F_t \quad (6)$$

¹⁰ Un proceso estocástico ruido blanco tiene su primer momento igual a cero, mientras que su varianza es independiente del tiempo.

¹¹ El parámetro β es un factor de descuento de los valores futuros. Por su parte, el parámetro κ mide el grado de rigidez de precios.

¹² De nuevo, la estacionariedad de este proceso está garantizada por $|\psi| < 1$.

¹³ En esta función de pérdida social, el banco central tiene dos objetivos por alcanzar: (i) el nivel de producto natural, y (ii) una tasa de inflación nula.

¹⁴ Si la tasa de interés nominal es el instrumento, entonces la oferta monetaria (ausente en este modelo) es necesariamente una variable endógena.

sujeto a

$$\pi_t = \kappa x_t + f_t \quad (7)$$

donde F_t y f_t son

$$F_t \equiv \frac{1}{2} E_t \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i (x_{t+i}^2 + \alpha \pi_{t+i}^2)$$

$$f_t \equiv \beta E_t \pi_{t+1} + \epsilon_{2t}$$

La condición de primer orden del problema de optimización del banco central es

$$x_t = -\alpha \kappa \pi_t \quad (8)$$

Esta ecuación nos dice que la autoridad monetaria contraerá la brecha de producción real en tanto la tasa de inflación esté por encima de su objetivo de política monetaria. El grado de reducción de la producción depende proporcionalmente de la rigidez de precios κ y de las preferencias de una mayor estabilidad de precios α .¹⁵

El banco central busca satisfacer 'función de respuesta' y la curva de Phillips, por consiguiente, sustituimos (8) en (3) para obtener

$$\pi_t = \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_t \pi_{t+1} + \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} \epsilon_{2t} \quad (9)$$

Bajo la hipótesis de expectativas racionales, es necesario iterar esta ecuación hacia adelante. En estos cálculos, ayuda mucho, considerar la misma ecuación para el período $t + 1$.

$$\pi_{t+1} = \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_{t+1} \pi_{t+2} + \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} \epsilon_{2t+1}$$

Por analogía, en el período $t + n$, esta misma ecuación es

$$\pi_{t+n} = \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha \kappa^2} \right\}^n E_t \pi_{t+n+1} + \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_t \epsilon_{2t+n}$$

Ahora es conveniente que las expectativas sean calculadas desde la perspectiva del período t . Al tener presente esto, la expectativa de inflación para el período $t + 1$ es igual a:¹⁶

$$\begin{aligned} E_t \pi_{t+1} &= \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_t E_{t+1} \pi_{t+2} + \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_t \epsilon_{2t+1} \\ &= \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} E_t \pi_{t+2} + \left\{ \frac{\psi}{1 + \alpha \kappa^2} \right\} \epsilon_{2t} \end{aligned} \quad (10)$$

¹⁵ Esta condición (8) se denomina la 'función de respuesta' de la política monetaria.

¹⁶ En el cálculo de esta expectativa es necesario considerar la 'ley de expectativas iteradas'. Esta ley nos dice, por ejemplo, que para la variable aleatoria z_t se cumple $E_t E_{t+1} z_{t+2} = E_t z_{t+2}$.

Sustituyendo (10) en (9) tenemos

$$\pi_t = \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha\kappa^2} \right\}^2 E_t \pi_{t+2} + \left[1 + \frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2} \right] \left\{ \frac{1}{1 + \alpha\kappa^2} \right\} \epsilon_{2t} \quad (11)$$

Al iterar esta ecuación para n períodos adelante, entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \pi_t &= \left\{ \frac{\beta}{1 + \alpha\kappa^2} \right\}^n E_t \pi_{t+2} \\ &+ \left[1 + \left(\frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2} \right) + \dots + \left(\frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2} \right)^{n-1} \right] \left\{ \frac{1}{1 + \alpha\kappa^2} \right\} \epsilon_{2t} \end{aligned} \quad (12)$$

El paréntesis en el corchete que se repite en la ecuación anterior es un número inferior a la unidad. Si $n \rightarrow \infty$, tenemos una progresión geométrica conocida. De este modo, podemos calcular la solución de expectativas racionales para la tasa de inflación.

$$\pi_t = \frac{1}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} \quad (13)$$

Ahora bien, podemos sustituir (13) en (8) y encontrar también una solución de expectativas racionales para la brecha de producción.

$$x_t = -\frac{\alpha\kappa}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} \quad (14)$$

A partir de estos dos resultados podemos construir una regla de política monetaria óptima. Lo único que tenemos que hacer es adelantar un período de tiempo las ecuaciones (13) y (14) y después calcular sus expectativas tomando en cuenta la ecuación (4).

$$E_t \pi_{t+1} = \frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} \quad (15)$$

$$E_t x_{t+1} = -\frac{\psi\alpha\kappa}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} \quad (16)$$

Por último, sustituimos (14), (15) y (16) en la ecuación (4) para deducir la regla de tasa de interés óptima que el banco central diseña.

$$\begin{aligned} i_t &= E_t \pi_{t+1} + \frac{1}{\sigma} [-x_t + E_t x_{t+1} + \epsilon_{1t}] \\ &= \frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\alpha\kappa}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} - \frac{\psi\alpha\kappa}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \epsilon_{2t} + \epsilon_{1t} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \epsilon_{1t} + \left[1 + \frac{\alpha\kappa}{\sigma\psi} - \frac{\alpha\kappa}{\sigma} \right] \left(\frac{\psi}{1 + \alpha\kappa^2 - \psi} \right) \epsilon_{2t} \\ &= \frac{1}{\sigma} \epsilon_{1t} + \left[1 + \frac{\alpha\kappa(1 - \psi)}{\sigma\psi} \right] E_t \pi_{t+1} \end{aligned} \quad (17)$$

La ecuación anterior implica el banco central fija la tasa de interés nominal más que proporcionalmente con cambios en la tasa de inflación esperada.¹⁷

A modo de una síntesis, las ecuaciones (13), (14) y (17) muestran tres resultados: (i) la autoridad monetaria tiene la capacidad de neutralizar los choques de demanda agregada al fijar la tasa de interés a través de su regla monetaria óptima, (ii) en el corto plazo, el banco central es incapaz de evitar los efectos económicos de los choques de oferta agregada y (iii) una alteración del objetivo de inflación se refleja únicamente en la tasa de inflación a instancias de una compensación en la tasa de interés nominal.

3. Una visualización gráfica del modelo

Es provechoso diseñar una representación gráfica para este modelo de política monetaria óptima discrecional. En la suposición de ausencia de disturbios exógenos ($\epsilon_{1t} = \epsilon_{2t} = 0$), además que las expectativas de inflación $E_t \pi_{t+1}$ y brecha de producto $E_t x_{t+1}$ permanezcan sin cambios, es posible diseñar un sistema de dos cuadrantes tal como se ilustra en la Gráfica 1. En el espacio (x_t, i_t) del cuadrante superior, se dibujan la relación *IS* (con pendiente negativa) junto con la regla monetaria óptima *RT* (una recta horizontal). En el espacio (x_t, π_t) del cuadrante inferior, se trazan la curva de Phillips *CP* (curva de pendiente positiva) y la 'función de respuesta' del banco central, *FR* (curva de pendiente negativa).¹⁸ Los cuadrantes inferior y superior de esta gráfica se relacionan verticalmente en términos de la brecha de producción x_t .¹⁹

El equilibrio macroeconómico en los dos cuadrantes del panel (a) de la Gráfica 1 se denota por el punto *A*. En el cuadrante superior, se muestra la tasa de interés i_1 que fija el banco central y que contribuye en el sostén de una brecha de producción x_1 . En el cuadrante inferior de esta misma gráfica, se proyecta x_1 para facilitar el cálculo de la tasa de inflación π_1 que es igual a la meta de inflación que decide el banco central $\bar{\pi}$.²⁰

En el panel (b) de la Gráfica 1, el banco central relaja su objetivo de inflación. La curva *IS* cambia de posición hacia arriba-derecha debido a que aumentan las expectativas de inflación. La curva *CP* también se traslada hacia arriba-izquierda por el incremento en las expectativas de inflación. Similarmente, la curva *FR* se traslada hacia arriba-derecha. En esta situación, el banco central reacciona eligiendo una tasa de interés nominal más alta, pero congruente con la nueva meta de inflación. Esto explica el traslado de la curva *RT* hacia arriba y por qué la tasa de interés aumenta uno-a uno con la tasa de inflación, de modo que la tasa de interés real no cambie. Esta decisión de la autoridad monetaria le permite neutralizar los efectos de una relajación en la meta de inflación sobre la brecha de producción. De este modo, los únicos cambios visibles son la tasa de interés nominal y la tasa de inflación, tal como se muestran en ambos cuadrantes (inferior y superior) por los puntos *A* y *B*, respectivamente.

¹⁷ Esta proposición se deduce directamente del término $[1 + \frac{\alpha(1-\beta)}{\sigma}]$, el cual es mayor a la unidad debido a que $\psi \in (-1,1)$.

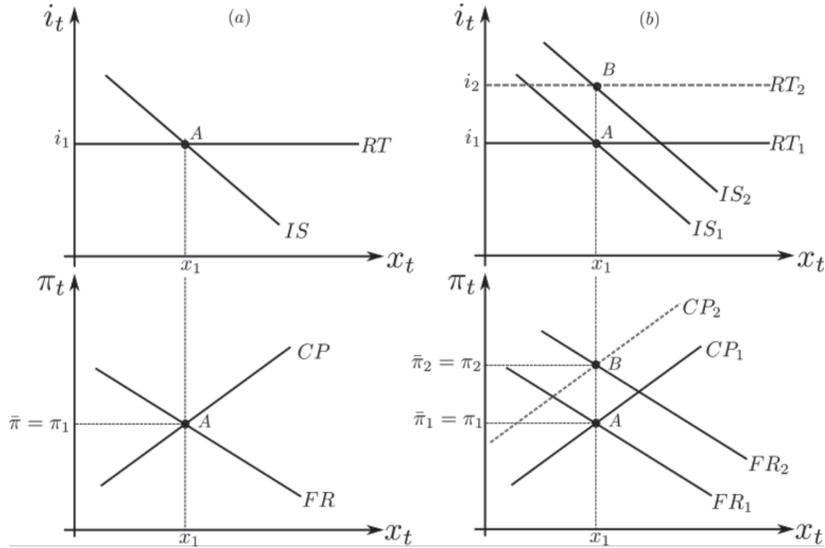
¹⁸ Las pendientes de las diferentes curvas dibujadas se basan en las ecuaciones (1), (3), (8) y (17), respectivamente.

¹⁹ La explicación que sigue es una aproximación porque la resolución simultánea implica un conjunto de variables estocásticas acompañadas de términos de expectativas.

²⁰ En las ecuaciones de este modelo económico, tácitamente la meta de inflación es igual a cero, pero en las Gráficas 1.2 y 1.2 contemplamos una meta de inflación diferente de cero

Gráfica 1

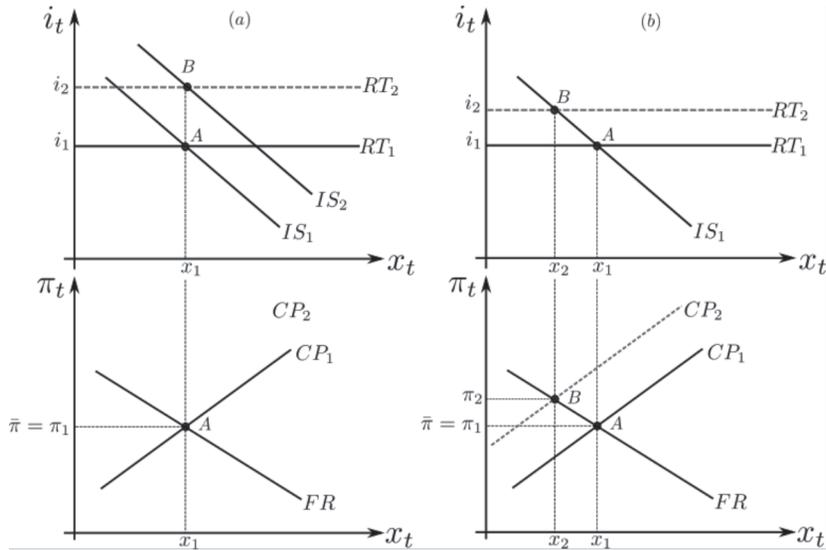
(a) El equilibrio macroeconómico es representado por A.
 (b) El banco central relaja su meta de inflación de $\bar{\pi}_1$ a $\bar{\pi}_2$.



La historia es diferente en la Gráfica 2. En el cuadrante superior del panel (a) de esta gráfica se muestra un choque positivo de demanda agregada $\epsilon_{1t} > 0$ por lo que la economía se mueve del punto A al B. La curva IS se mueve hacia arriba-derecha, acompañado de un desplazamiento también hacia arriba de la curva RT. Esto es así porque el banco central reacciona elevando suficiente la tasa de interés nominal para contrarrestar los cambios en la tasa de interés real. En el cuadrante inferior del panel (a) de la Gráfica 2 ninguna de las dos curvas es afectada por el disturbio de demanda agregada.²¹ Es decir, el choque positivo en la demanda agregada no tiene incidencia en la brecha de producción ni en la tasa de inflación porque el banco central tiene la capacidad de neutralizar los efectos adversos a través de la manipulación de tasa de interés real. En síntesis, el diseño de una regla de política monetaria óptima aunado a la información disponible, permite al banco central blindar a la economía de cualquier choque de demanda agregada.

²¹ Ni la función de reacción ni la curva de Phillips dependen del choque ϵ_{1t} .

Gráfica 2 (a) Un choque positivo de demanda agregada.
(b) Un choque negativo de oferta agregada.



En el panel (b) de la Gráfica 2 se muestran los efectos económicos de un choque negativo de oferta agregada (choque inflacionario) ϵ_{2t} . En el cuadrante inferior, el choque negativo de oferta agregada se manifiesta por un desplazamiento de la curva CP hacia arriba-izquierda. En la medida que la tasa inflación π_t se aleja de la meta de inflación inicial $\bar{\pi}_1$ el banco central reacciona elevando la tasa de interés nominal, amortiguando así la contracción de la actividad económica. Con todo, en este caso, el banco central es incapaz de blindar a la economía. Además, debido a este choque inflacionario, tasa de inflación se sitúa por encima de su objetivo acompañado de una menor producción de bienes. Estos efectos son ilustrados en el panel (b) de la Gráfica 2 por la transición de A al nuevo equilibrio B .

Las gráficas anteriores ilustran el impacto inmediato de la relajación en la meta de inflación y de también del surgimiento inesperados de choques de demanda y oferta agregadas. Sin embargo, es todavía más ilustrador si nos enfocamos en la simulación numérica del comportamiento de esta economía estocástica, incluyendo la reacción del banco central, especialmente si ocurren choques inflacionarios. En la próxima sección mostramos la manipulación algebraica necesaria para la simulación numérica en presencia de disturbios económicos.

4. El sistema lineal de expectativas racionales

Existen diferentes métodos numéricos de solución de sistemas lineales de expectativas racionales. Siguiendo a Klein (2000), hemos optado por el método de descomposición de Schur.²² A este respecto, con el propósito de simular numéricamente este sistema lineal de expectativas racionales es conveniente separar las variables de estado y de control en las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (8).

$$\begin{aligned} \epsilon_{1t} &= \rho\epsilon_{1t-1} + \hat{\epsilon}_{1t} \\ \epsilon_{2t} &= \psi\epsilon_{2t-1} + \hat{\epsilon}_{2t} \\ E_t x_{t+1} + \sigma E_t \pi_{t+1} + \epsilon_{1t} &= x_t + \sigma i_t \\ \beta E_t \pi_{t+1} + \epsilon_{2t} &= \pi_t - \kappa x_t \\ 0 &= x_t + \alpha \kappa \pi_t \end{aligned} \tag{ER}$$

El sistema de ecuaciones (ER) se puede escribir matricialmente de la siguiente manera:

$$A E_t z_{t+1} = B z_t + \epsilon_t \tag{18}$$

donde,

$$E_t z_{t+1} = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \\ E_t i_{t+1} \end{bmatrix}, \quad z_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t-1} \\ \epsilon_{2t-1} \\ x_t \\ \pi_t \\ i_t \end{bmatrix}, \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{1t} \\ \hat{\epsilon}_{2t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\kappa & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

A y B son matrices de parámetros asociadas a los vectores $E_t z_{t+1}$ y z_t respectivamente.

Como es ventajoso separar a las variables predeterminadas de las variables no-predeterminadas,²³ sean z_t^b y z_t^f , los vectores de variables predeterminadas (*b*: backward-looking) y variables no-predeterminadas (*f*: forward-looking), respectivamente. Una forma compacta de los vectores está en términos de estas dos clases de variables.

$$E_t z_{t+1} = \begin{bmatrix} z_t^b \\ E_t z_{t+1}^f \end{bmatrix}, \quad z_t = \begin{bmatrix} z_{t-1}^b \\ z_t^f \end{bmatrix}$$

donde, las variables predeterminadas están representadas en los períodos t y $t - 1$.

²² Otras posibilidades se describen en Anderson (2008), Binder & Pesaran (1995), King & Watson (1998) y Sims (2002).

²³ Las dos nomenclaturas alternativas son: (i) variables de estado y variables de control, y (ii) variables backward-looking y variables forward-looking o variables de salto.

$$z_t^b = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}, \quad z_{t-1}^b = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t-1} \\ \epsilon_{2t-1} \end{bmatrix}$$

En los períodos $t + 1$ y t , respectivamente, las variables no-predeterminadas están contenidos en los vectores de abajo.

$$E_t z_{t+1}^f = \begin{bmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \\ E_t i_{t+1} \end{bmatrix}, \quad z_t^f = \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \\ i_t \end{bmatrix}$$

La diferencia entre las variables predeterminadas y no-predeterminadas es importante, una variable predeterminada es conocida en t , mientras que una variable no-predeterminada es desconocida en el período t .

Siguiendo a Klein (2000), una variable predeterminada tiene dos características: (i) su error de pronóstico un período adelante es exógeno, y (ii) su valor inicial está exógenamente dado. De la ecuación (18), el error de pronóstico de z_t^b un período adelante, por suposición, es exógeno.

$$z_{t+1}^b - E_t z_{t+1}^b = \xi_{t+1} \quad (19)$$

donde, z_0^b además, está exógenamente dado.

Si la matriz A fuese regular en la ecuación (18), el proceso de resolución sería más simple. Pero, como en esta ecuación, la matriz A es singular, entonces usaremos el teorema de descomposición generalizado de Schur.

Teorema de Schur. Dado dos matrices A y B reales de dimensión $n \times n$, existen matrices unitarias ortogonales Q y Z , tal que $Q^T A Z$ es una matriz Schur real superior y $Q^T B Z$ es una matriz triangular superior.

$$Q^T A Z = S \quad (20)$$

$$Q^T B Z = T \quad (21)$$

donde, el par de matrices (S, T) se dice que tienen la forma de Schur real generalizada.

Conviene obtener la expectativa de la ecuación (18) antes de aplicar el Teorema de Schur.

$$A E_t z_{t+1} = B z_t \quad (22)$$

Ahora realizaremos una transformación lineal de los vectores z_t y z_{t+1} , respectivamente.

$$Z \hat{z}_t = z_t \quad (23)$$

$$Z \hat{z}_{t+1} = z_{t+1} \quad (24)$$

Sustituimos (23) y (24) en (22), inmediatamente multiplicamos por Q^T y luego utilizamos las ecuaciones del teorema de Schur.

$$AZE_t \hat{z}_{t+1} = BZ \hat{z}_t \tag{25}$$

$$Q^T AZE_t \hat{z}_{t+1} = Q^T BZ \hat{z}_t \tag{26}$$

$$SE_t \hat{z}_{t+1} = T \hat{z}_t \tag{27}$$

El cociente de elementos en la diagonal principal de las matrices T y S produce valores propios del sistema.

$$\lambda(A, B) = \frac{T(i, i)}{S(i, i)} \tag{28}$$

La condición de Blanchard-Kahn de existencia de una solución única requiere que la expectativa de z_t no explote y que el número de valores propios fuera del círculo unitario sea igual al número de variables no-predeterminadas.

Se ordena el sistema (27) de acuerdo a los valores propios. La parte superior del vector z_t se corresponde a los valores propios estables (dentro del círculo unitario), éste se marca con s , mientras que la parte inestable (fuera del círculo unitario) se etiqueta con u .

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{29}$$

Como primero están ordenados todos los valores propios inferiores a la unidad, entonces S_{11} es invertible. Por otro lado, la matriz S_{22} no necesariamente es invertible porque algunos de sus elementos podrían ser iguales a cero.

Escribimos la ecuación de la parte inestable para el tiempo hasta el infinito y hacemos iteración hacia atrás.

$$S_{22}E_t u_{t+1} = T_{22}u_t \tag{30}$$

Como el par (S_{22}, T_{22}) contiene los valores propios inestables, el sistema violaría la condición de no-explósión, a menos que

$$u_t = 0, \quad \forall t \tag{31}$$

Sustituyendo (31) en (29) obtenemos $S_{11}E_t s_{t+1} = T_{11}s_t$. Como S_{11} es invertible, entonces tenemos

$$E_t s_{t+1} = S_{11}^{-1} T_{11} s_t \tag{32}$$

donde, todavía falta por encontrar una condición inicial para s_t .

Ahora bien, si en la ecuación (23), particionamos la matriz Z y los vectores \hat{z}_t y z_t , tenemos

$$\begin{bmatrix} z_t^b \\ z_t^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad (33)$$

Sustituyendo (31) en (33) obtenemos

$$z_t^b = Z_{11} s_t \quad (34)$$

$$z_t^f = Z_{21} s_t \quad (35)$$

Si la matriz Z_{11} es de rango completo, entonces

$$s_t = Z_{11}^{-1} z_t^b \quad (36)$$

Esta ecuación y la condición inicial para z_t^b , es decir $s_0 = Z_{11}^{-1} z_0^b$ constituyen una condición inicial para la ecuación (32).

Por otro lado, utilizando (34) en la ecuación (19) obtenemos

$$s_{t+1} = E_t s_{t+1} + Z_{11}^{-1} \xi_{t+1} \quad (37)$$

Sustituyendo (32) en (37) tenemos

$$s_{t+1} = S_{11}^{-1} T_{11} s_t + Z_{11}^{-1} \xi_{t+1} \quad (38)$$

Por lo tanto, una solución no-explosiva del sistema (29) está dado secuencialmente por las ecuaciones (31) y (38).

En términos del sistema original, es necesario sustituir (38) en (34) y (35) y obtener

$$z_{t+1}^b = F z_t^b + \xi_{t+1} \quad (39)$$

$$z_t^f = G z_t^b \quad (40)$$

donde;

$$F = Z_{11} S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1}$$

$$G = Z_{21} Z_{11}^{-1}$$

Estas dos últimas ecuaciones, junto con la condición inicial, implican una resolución secuencial del sistema dinámico original. Ahora estamos listos para acometer la simulación numérica de este modelo económico respecto de la actuación de la economía que se exterioriza sobre todo si se producen algunos disturbios exógenos.

5. Impulso-respuesta de los choques inflacionarios

La importancia de las funciones impulso-respuesta es evidente en el análisis dinámico sobre todo si se producen choques en las variables exógenas. La simulación numérica descansa en el conocimiento de los parámetros del modelo macroeconómico.

Cuadro 1 Parámetros calibrados

	<i>Neutral</i>	<i>Paloma 1</i>	<i>Paloma 1</i>	<i>Halcón 1</i>	<i>Halcón 2</i>
α	1.0	0.1	0.1	1.9	1.9
β	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
σ	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
κ	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
ρ	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
ψ	0.5	0.1	0.9	0.1	0.9

Fuente: Elaboración propia a partir de Walsh (2003)

En especial, el análisis dinámico procede en los términos de la información del Cuadro . Los valores de los parámetros reflejan la calibración realizada por Walsh (2003) y otros autores, de modo que estos tienen un antecedente. Sin embargo, el cuadro pone de relieve dos aspectos relativos a la actitud del banco central y a la naturaleza del choque de oferta agregada. Estos dos aspectos son los siguientes:

- En cuanto al parámetro α , de un lado, tenemos a un 'halcón monetario' (denotado por un valor $\alpha > 1$, un término que describe la prioridad de un banco central por mantener la inflación baja. Esto contrasta con una 'paloma monetaria' (indicado por un $\alpha < 1$, es decir, un banco central que hace hincapié más bien el objetivo de una elevada tasa de producción.²⁴
- Por otro lado, no es lo mismo enfrentar un choque exógeno de oferta agregada tipificado por un nivel de persistencia alto o bajo. En vista de que el choque inflacionario está representando por un proceso autorregresivo estacionario de primer orden, $\epsilon_{2t} = \psi\epsilon_{2t-1} + \hat{\epsilon}_{2t}$ entonces ψ mide el nivel de persistencia. Un nivel de persistencia bajo se manifiesta por un parámetro ψ cercano a cero, mientras que un nivel alto de persistencia se muestra o refleja por un valor de ψ cercano a la unidad.²⁵

²⁴ Los 'halcones' usan la política monetaria para combatir la inflación, mientras que las 'palomas' implementan una política acomodaticia para impulsar el crecimiento.

²⁵ La persistencia se define como la velocidad con la que una serie de tiempo regresa a su equilibrio (o tendencia de largo plazo) después de ser impactada por una perturbación.

La primera columna del Cuadro 1 es la referencia para las diferentes simulaciones numéricas. Los parámetros de las ecuaciones IS y curva de Phillips caracterizan a una economía como la de Estados Unidos. Sin embargo, lo más importante de esta referencia (primera columna) es que el banco central es neutral entre los objetivos de inflación y empleo. Además, el nivel de persistencia en el choque inflacionario es de nivel medio (ni bajo, ni alto).

Con la información de los parámetros, las matrices S_{11} , S_{22} , T_{11} y T_{22} de las ecuaciones (29) son, respectivamente.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1.199251 & -0.04762514 \\ 0.000000 & 1.45725595 \end{bmatrix}, \quad T_{11} = \begin{bmatrix} 0.5996254 & -0.02381257 \\ 0.0000000 & 0.72862798 \end{bmatrix}$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 1.387779e - 17 & -0.2999234 & -0.8008505 \\ 0.000000e + 00 & 0.5632558 & 0.1309432 \\ 0.000000e + 00 & 0.0000000 & 0.0000000 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} 0.7005962 & 0.2304031 & -6.707574e - 01 \\ 0.0000000 & 0.6821654 & 3.851458e - 17 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.044031e + 00 \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores implican la existencia de cinco valores propios, dos de los cuales son inferiores a la unidad, y las otras tres, son superiores a la unidad.

$$\lambda_1 = \frac{0.5996254}{1.199251} = 0.5$$

$$\lambda_2 = \frac{0.72862798}{1.45725595} = 0.5$$

$$\lambda_3 = \frac{0.7005962}{0} = \infty$$

$$\lambda_4 = \frac{0.6821654}{0.5632558} > 1$$

$$\lambda_5 = \frac{1.044031e + 00}{0} = \infty$$

Es decir, se cumple la condición Blanchard-Khan, a saber, que el número de valores propios fuera del círculo unitario es igual al número de variables no-predeterminadas.

Ahora bien, mediante la descomposición de Schur, calculamos las matrices F y G de las ecuaciones (39) y (40) son, respectivamente.

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.2343750 \\ 0.000 & 0.7812500 \\ 0.625 & 0.5371094 \end{bmatrix}$$

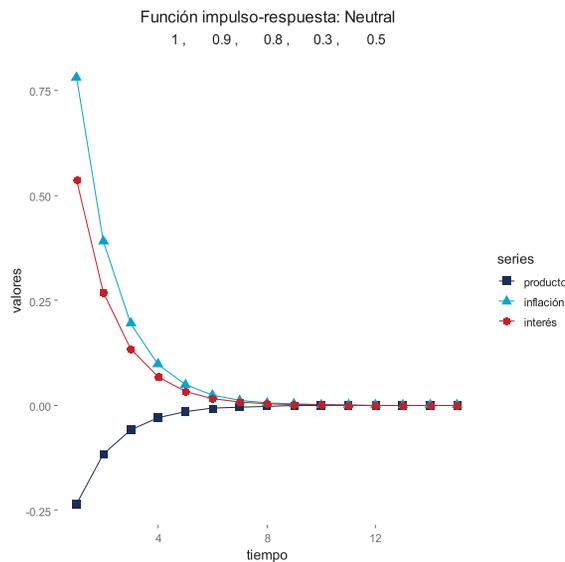
La función impulso-respuesta de las variables no-predeterminadas z_t^f está denotada por:

$$z_t^f = \begin{cases} G\epsilon_1, & j = 1 \\ GF^{j-1}G\epsilon_1, & j = 2,3, \dots, n \end{cases}$$

donde, n es el número de períodos de tiempo de la simulación.

Siguiendo esta expresión, en la Gráfica 3, se puede apreciar los efectos de un choque inflacionario, el cual ocasiona un salto de la tasa de inflación, además, de una contracción económica no despreciable. La reacción del banco central es fijar la tasa de interés nominal en un nivel más alto para contrarrestar la contracción económica al mismo tiempo que se pretende desinflar la economía. Las medidas tomadas por el banco central no son evidentes inmediatamente, pero más tarde que temprano la brecha de producción y la tasa de inflación retornan a sus valores de equilibrio. El proceso termina por ajustarse después de aproximadamente ocho periodos.²⁶ Estos resultados se erigen como referencia para las demás simulaciones numéricas.

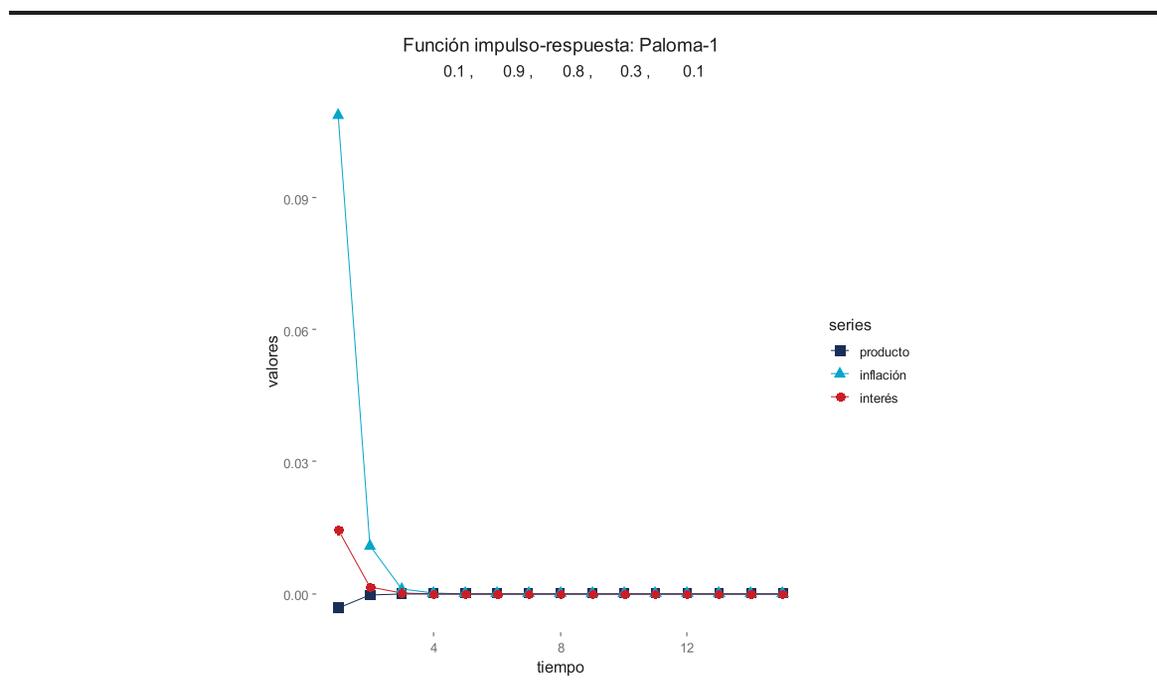
Gráfica 3 Un choque negativo de oferta agregada de 1% en el período 1 de un banco central neutral respecto de objetivos de inflación o producción-empleo



²⁶ Los efectos se disipan además porque solo en el período 1 emerge el choque inflacionario, en los siguientes períodos el sistema económico se ajusta a su equilibrio porque es estable.

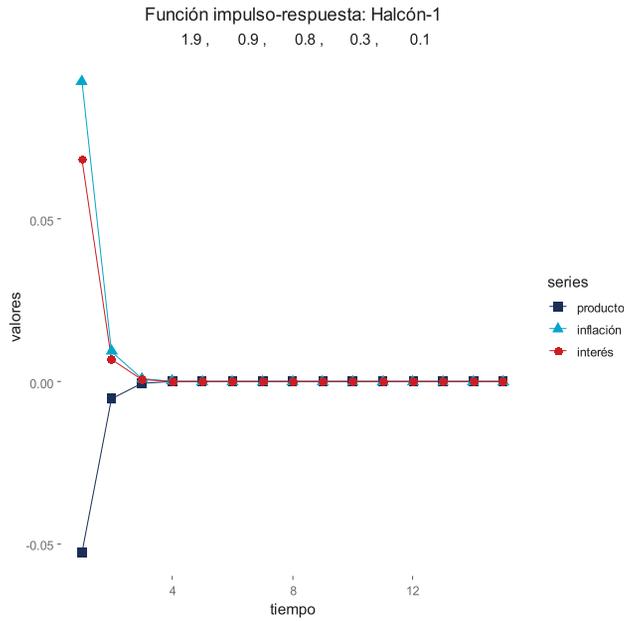
En las Gráficas 4 y 5, tenemos un nivel de persistencia bajo, por lo mismo, la tasa de inflación y producción apenas requieren de un ajuste de tres a cuatro períodos para retornar a sus valores de equilibrio.²⁷ Este rasgo contrasta con las Gráficas 6 y 7, en los que el nivel de persistencia es alto, por lo cual, las variables precisan de 40 o más períodos para retornar al equilibrio. Estos resultados numéricos simplemente confirman lo que intuimos de la persistencia de un choque de oferta agregada, se requiere de un período de tiempo más prolongado para retornar a un equilibrio macroeconómico, independientemente de la prioridad de la autoridad monetario por la inflación o la producción-empleo.

Gráfica 4 Un choque negativo de oferta agregada de 1% en el período 1 de un banco central que prioriza la producción empleo



²⁷ Esta situación en parte se explica por la naturaleza del choque de oferta agregada, el cual prácticamente se puede confundir con proceso estocástico ruido blanco.

Gráfica 5 Un choque negativo de oferta agregada de 1% en el período 1 de un banco central que prioriza la tasa de inflación



De igual manera, dado un bajo nivel de persistencia, tenemos dos diferentes entornos económicos en las Gráficas 4 y 5, y esto, de cierta manera, depende de las preferencias del banco central.²⁸ El banco central que prioriza el empleo y producción afronta un entorno de alta inflación. En cambio, un banco central que favorece una tasa de inflación baja, enfrenta un entorno de mayor contracción económica. Sin embargo, la situación o entorno es más dificultoso y nocivo, mientras mayor es el nivel de persistencia, tal como lo ilustran las Gráficas 6 y 7.

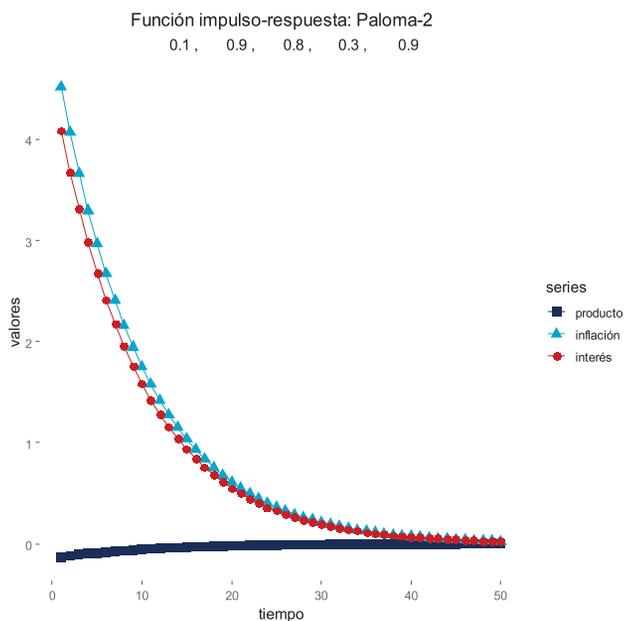
Dado el choque negativo de oferta agregada, en las simulaciones numéricas se reportan tasas de inflación más altas, cuanto mayor es el nivel de persistencia. Similarmente, la contracción económica es más profunda y perniciosa, mientras mayor es el nivel de persistencia del disturbio exógeno. Además, dicha coyuntura ilustra la existencia de un *trade-off* (compensación) entre una alta inflación y la recesión económica. Como es el caso, de alguna manera, el banco central coadyuva en la gestación de un determinado entorno económico.

²⁸ Una manera de evocar esta situación es asociar al banco central 'paloma' con su preferencia por el empleo y producción, a la vez de relacionar a un banco central 'halcón' con su desazón por una tasa de inflación alta

En síntesis, a manera de resumen, entonces las simulaciones numéricas ponen de relieve dos aspectos relacionados.

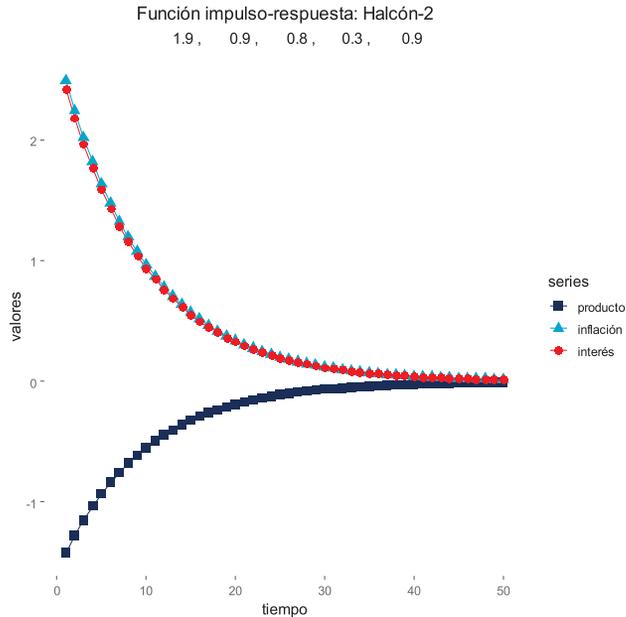
- En la medida en que el nivel de persistencia es mayor, el sistema económico necesita de más tiempo para ajustarse frente a un determinado choque de oferta agregada.
- Un banco central adepto a la producción-empleo experimenta un proceso inflacionario más pernicioso que un banco central hostil a la inflación, por el contrario, un banco central adverso a la inflación, debe contener más debido a que experimenta una contracción económica más profunda.

Gráfica 6 Un choque negativo de oferta agregada de 1% en el período 1 de un banco central que prioriza la producción y empleo



Gráfica 7

Un choque negativo de oferta agregada de 1% en el período 1 de un banco central que prioriza la tasa de inflación



6. Conclusión

La macroeconomía sigue transformándose y los modelos de equilibrio general dinámico estocásticos (DSGE) parecen ahora ser el caballo de batalla de la macroeconomía moderna. La literatura es vasta y la metodología DSGE, de hecho, está cambiando la manera en que enseñamos macroeconomía. Esta metodología toma en cuenta que la economía es afectada por perturbaciones aleatorias, por ende, en este método no se descuidan los elementos generadores de las fluctuaciones económicas.

El análisis del modelo nekeynesiano con rigideces nominales es revelador de la política monetaria óptima. La aportación de Clarida, *et al.* (1999) es una presentación simplificada DSGE de la política monetaria óptima. Esta progenie log-linealizada afortunadamente tiene una solución cerrada y su representación gráfica permite ganar intuición en el impacto económico de diversos choques exógenos, incluyendo un cambio en el objetivo de política económica. Sin embargo, todavía es más instructivo calcular soluciones numéricas del sistema de expectativas racionales mediante el 'procedimiento de Schur'. Las soluciones numéricas nos permiten estudiar el comportamiento de las variables no-predeterminadas a través de las funciones impulso-respuesta. Estas funciones describen la evolución de las variables de interés a lo largo de un horizonte de tiempo específico después de un choque en un momento dado.

Clarida, *et al.* (1999) considera dos situaciones de la política monetaria óptima: discrecionalidad y compromiso. En el caso 'discrecional', el banco central elige la tasa de interés optimizando su función de bienestar cada período. En el denominado 'compromiso', el banco central resuelve todo el problema desde el principio y se compromete de formas creíbles sobre su propio comportamiento en el futuro. La actuación vinculante no es acción cotidiana, pero es una referencia para la discrecionalidad.

Hemos caracterizado a la política monetaria óptima discrecional a través de las funciones impulso-respuesta. En virtud de que el banco central es capaz de neutralizar los efectos nocivos de los choques de demanda agregada, nos ceñimos únicamente al análisis de la respuesta de la autoridad monetaria frente a un choque negativo de oferta agregada, el cual pudiera manifestar niveles altos o bajos de persistencia. La simulación numérica muestra que el horizonte de tiempo necesario para ajustarse a sus valores de equilibrio es tanto más prolongado mientras mayor sea el nivel de persistencia del disturbio. Este resultado es independiente de las preferencias que tenga el banco central respecto de sus objetivos de política económica.

La actitud del banco central respecto de la tasa de inflación y/o la producción-empleo, subyacente a la función de bienestar social, en gran medida, desde luego, determina el ajuste cuantitativo de la tasa de interés. Además, los costos implicados por priorizar una determinada meta de política monetaria son distintos dependiendo del mecanismo de transmisión de política monetaria. En tanto mayor es el peso que recibe la tasa de inflación como objetivo, mayor es el costo de contracción económica con el que debe convivir la economía. De manera análoga, mientras mayor el peso dado a la producción-empleo como objetivo, mayor es la tasa de inflación que prevalece en la economía. Cada banco central decide a este respecto dependiendo de la historia de su propia experiencia, así como de los factores institucionales que caracterizan a la economía.

Como lo mencionamos anteriormente, estos resultados numéricos aplican únicamente al caso discrecional de la política monetaria óptima, por lo que una investigación futura necesita de las comparaciones de simulaciones numéricas de la política monetaria óptima bajo compromiso. Esto último es atractivo porque podríamos contrastar los resultados con el caso más general. Por otro lado, está latente la determinación de los valores de los parámetros. La estimación estadística y la calibración son dos alternativas para atender esta cuestión. En ambos casos, existen una infinidad de procedimientos, por lo que hay diversas maneras para calcular los parámetros de cualquier modelo macroeconómico. Además, es importante también revisar la microeconomía intertemporal subyacente a las relaciones agregadas, incluyendo su manipulación para obtener las ecuaciones log-linealizadas, aunado que es posible incorporar aspectos suplementarios, como el sesgo inflacionario o la histéresis en el producto natural, etc. En cualquier caso, el objetivo es facilitar la intuición de los modelos abstractos mediante la simulación computacional.

Referencias

- Anderson, G.S. (2008). Solving Linear Rational Expectations Models: A Horse Race. *Computational Economics*, 31, 95–113. <https://doi.org/10.1007/s10614-007-9108-0>
- Binder, M. & Pesaran, M. H. (1995). Multivariate rational expectations models and macroeconomic modelling: A review and some new results. In M. H. Pesaran & M. R. Wickens (Eds.), *Handbook of Applied Econometrics*. Vol. 1: Macroeconomics, chapter 3, (pp. 139–187). Blackwell Publishers Ltd.
- Blanchard, O.J. & Khan, C.M. (1980). The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, 48(5), 1305-1311 <https://doi.org/10.2307/2F1912186>
- Clarida, R., Galí, J. & Gertler, M. (1999). The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective, *Journal of Economic Literature*, 37, 1661–1707 <http://dx.doi.org/10.1257/jel.37.4.1661>
- Colander, D. (2018). The Macro Pedagogy Debate: Teaching DSGE to Undergraduates Symposium. *Journal of Economic Education*, 49(3): 224–225 <https://doi.org/10.1080/00220485.2018.1464989>
- Costa, C. J. (2016). Understanding DSGE models. Theory and Applications. Malaga: Vernon Press.
- Galí, J. (2008). Monetary policy, inflation, and the business cycle: An introduction to the New Keynesian framework, New Jersey: Princeton University Press.
- Galí, J. & Getler, M. (2007). Macroeconomic Modeling for Monetary Policy Evaluation. *Journal of Economic Perspectives*, 21(4): 25-45 <https://www.jstor.org/stable/30033750>
- King, R., & Watson, M. (1998). The Solution of Singular Linear Difference Systems under Rational Expectations. *International Economic Review*, 39(4): 1015-1026 <https://doi.org/10.2307/2527350>
- Klein, P. (2000). Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 24, 1405-1423 [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889\(99\)00045-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889(99)00045-7)
- Moreno-Rivas, Á. (2018). ¿Se debería enseñar a los estudiantes de los pregrados de economía el modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE)? *Revista Papeles*, 10(19): 18-25.
- Neumuller, S., Rothschild, C., & Weerapana, A. (2018). The Macro Pedagogy Debate: Teaching DSGE to Undergraduates Symposium. *Journal of Economic Education*, 49(3): 242–251 <https://doi.org/10.1080/00220485.2018.1464990>
- Ljungqvist, L. & Sargent. T. (2004). Recursive Macroeconomic Theory, Second Edition, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press
- Sims, CA. (2002). Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, 20: 1–20 <https://doi.org/10.1023/A:1020517101123>
- Solis-García, M. (2018). The Macro Pedagogy Debate: Teaching DSGE to Undergraduates Symposium. *Journal of Economic Education*, 49(3): 226–236 <https://doi.org/10.1080/00220485.2018.1464987>
- Snowdon, B. & Vane, H. (2005). Modern Macroeconomics: Its Origins, Development and Current State, UK: Edward Elgar
- Svensson, L.E.O. (1997). Inflation Forecast Targeting: Implementing and Monitoring Inflation Targeting. *European Economic Review*, 41(6): 1111–46
- Svensson, L.E.O. (2003). What Is Wrong with Taylor Rules? Using Judgment in Monetary Policy through Targeting Rules, *Journal of Economic Literature*, 41: 426-477 <https://doi.org/10.1257/0022051037657627>

- Taylor, J.B. (1993). Discretion versus policy rules in practice, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 39 (1), 195-214
- Uhlig, H. (1999): 'A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily', *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press, Oxford, 30-61
- Walsh, C. (2003). *Monetary Theory and Policy*, Second Edition. Cambridge: The MIT Press.
- Woodford, M. (2003). *Interest and Prices Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton and Oxford: Princeton University Press